

Terminale Spé Maths – Chapitre P-01

DÉNOMBREMENT

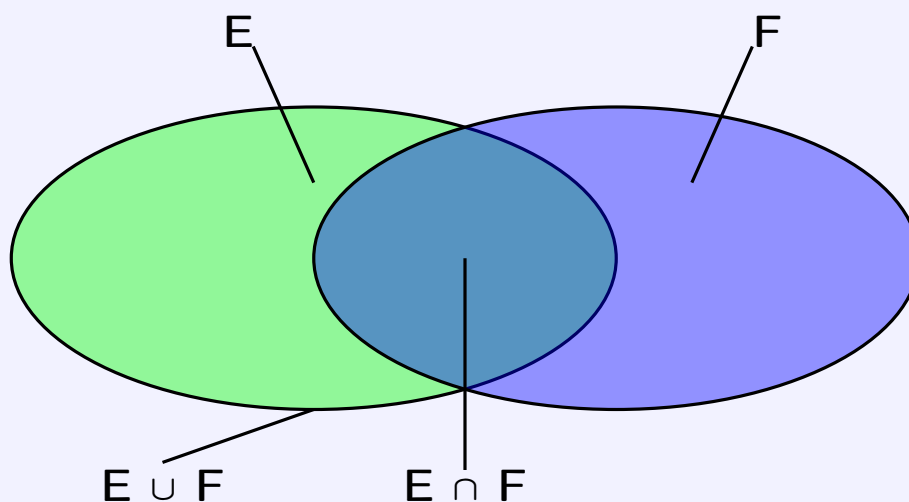


Table des matières

I	Principes additif et multiplicatif	2
1)	Principe additif : réunion d'ensembles disjoints	2
2)	Principe multiplicatif : produit cartésien	3
II	k-uplets ou k-listes d'un ensemble	4
III	Arrangements et permutations	4
1)	Factorielle d'un entier naturel	4
2)	Permutations d'un ensemble	5
3)	Arrangements d'un ensemble	5
IV	Combinaisons	6
1)	Parties d'un ensemble	6
2)	Combinaisons	7
3)	Propriétés des combinaisons	8
4)	Triangle de Pascal	8

I Principes additif et multiplicatif

1) Principe additif : réunion d'ensembles disjoints

DÉFINITION

Soit E un ensemble **fini**.

On appelle **cardinal** de E , l'entier naturel noté $\text{Card}(E)$ égal au nombre d'éléments de E .

EXEMPLE

Soit $E = \{-4, 15 ; -2 ; 0 ; 1,05 ; 3\}$. Alors $\text{Card}(E) = 5$.

REMARQUES

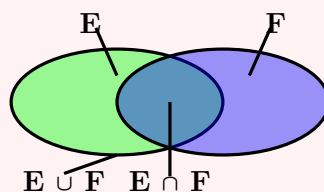
- Si E est l'ensemble vide, alors $\text{Card}(E) = 0$.
- Certains ensembles ne sont pas finis : l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels, l'ensemble des réels de l'intervalle $[0; 1]$ etc.

PROPRIÉTÉ

admise

Soient E et F deux ensembles finis. On a alors :

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) - \text{Card}(E \cap F)$$



DÉFINITION

Soient E et F deux ensembles finis.

On dit que E et F sont **disjoints** si et seulement si $E \cap F = \emptyset$.

PROPRIÉTÉ

admise

Soient E et F deux ensembles finis et disjoints. Alors :

$$\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F)$$

REMARQUE

On peut généraliser la propriété précédente dans le cas de n ensembles finis et deux à deux disjoints

$$A_1, A_2, \dots, A_n : \quad \text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i)$$

EXEMPLES

Soient $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{d; e\}$.

1. E et F sont-ils disjoints ? En déduire $E \cap F$.
2. Écrire $E \cup F$ et préciser $\text{Card}(E \cup F)$.

PROPRIÉTÉ

Soient A une partie d'un ensemble E fini, et \bar{A} le complémentaire de A dans E . Alors :

$$\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$$

DÉMONSTRATION

\bar{A} est le complémentaire de A , donc $A \cup \bar{A} = E$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$, et ainsi $\text{Card}(A \cup \bar{A}) = \text{Card}(E)$.

Donc $\text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A}) - \text{Card}(A \cap \bar{A}) = \text{Card}(E)$.

Donc $\text{Card}(A) + \text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E)$, d'où finalement $\text{Card}(\bar{A}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(A)$.

2) Principe multiplicatif : produit cartésien**DÉFINITION**

Soient E et F deux ensembles **non vides**.

On appelle produit cartésien de E par F l'ensemble noté $E \times F$ (« E croix F ») constitué des couples $(x; y)$, où x est un élément de E et y un élément de F .

On le note $E \times F = \{(x; y), x \in E, y \in F\}$

REMARQUES

- On peut généraliser cette définition à plus de deux ensembles non vides.
- Le produit cartésien de E par E est noté E^2 .

EXEMPLES

- \mathbb{R}^2 pour les coordonnées d'un point du plan, \mathbb{R}^3 pour celles d'un point de l'espace.
- On lance deux dés : un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6, et un dé à 4 faces colorées rouge, vert, bleu, jaune : $D_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $D_2 = \{rouge; vert; bleu; jaune\}$.
Un lancer possible est alors un élément de $D_1 \times D_2$, par exemple $(4; vert)$.

EXERCICE

Soient $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$. Déterminer l'ensemble $E \times F$, puis l'ensemble $F \times E$.

PROPRIÉTÉ

Soient E et F deux ensembles finis et non vides. Alors :

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$$

DÉMONSTRATION

Chaque élément de E permet de générer autant de couples de $E \times F$ que d'éléments de F .

(Faire un arbre.) D'où le résultat.

II k-uplets ou k-listes d'un ensemble

DÉFINITION

Soit E un ensemble non vide et k un entier naturel non nul.
On appelle **k-uplet** ou **k-liste** de E un élément de E^k .

REMARQUES

- Un 2-uplet est un **couple** et un 3-uplet est un **triplet**.
- Un k-uplet de E est une liste **ordonnée** d'éléments de E . Par exemple, le triplet $(1; 2; 3)$ n'est pas égal au triplet $(2; 1; 3)$.

EXEMPLE

- $(-2; 3)$ est un couple d'éléments de \mathbb{R} .
- $(f; u; t; u; r)$ est un 5-uplet d'éléments de l'ensemble des 26 lettres $E = \{a; b; \dots; z\}$.

PROPRIÉTÉ

admise

Soit E un ensemble fini non vide et k un entier naturel non nul. Alors :

$$\text{Card}(E^k) = \text{Card}(E)^k$$

Autrement dit, le nombre de k-uplets d'un ensemble E est $\text{Card}(E)^k$.

EXEMPLE

Le digicode d'un immeuble est formé d'une lettre suivie de trois chiffres.
Combien y-a-t-il de codes possibles ?

III Arrangements et permutations

1) Factorielle d'un entier naturel

DÉFINITION

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle **factorielle** n , l'entier naturel noté $n!$ (« factorielle n ») défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

REMARQUE

Par convention, on admet que $0! = 1$.

EXEMPLES

- Calculer $4!$
- Calculer astucieusement $\frac{7!}{5!}$.

2) Permutations d'un ensemble

DÉFINITION

Soit n un entier naturel non nul et soit E un ensemble fini non vide à n éléments.
On appelle **permutation** de E tout n -uplet d'éléments **distincts** de E .

EXEMPLES

- Si $E = \{a; b; c\}$, alors les triplets $(a; b; c)$ et $(b; a; c)$ sont deux permutations (distinctes) de E .
- On considère un jeu de 32 cartes. Alors tout mélange de ce jeu est une permutation de l'ensemble des cartes du jeu.

PROPRIÉTÉ

Soit n un entier naturel non nul. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$.

DÉMONSTRATION

Il y a n choix pour le premier élément de la permutation, puis $n - 1$ choix restants pour le deuxième élément, et ainsi de suite, jusqu'à 1 choix restant pour le dernier élément.

EXEMPLES

- Dans le premier exemple, il y a donc $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ permutations possibles de E .
- Dans le deuxième exemple, il y a donc $32! \approx 2,6 \times 10^{35}$ mélanges de jeu possibles.

3) Arrangements d'un ensemble

DÉFINITION

Soient n un entier naturel non nul, E un ensemble fini non vide à n éléments et soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
On appelle **arrangement** de k éléments de E tout k -uplet d'éléments **distincts** de E .

EXEMPLES

- Soit $E = \{a; b; c\}$. Alors les couples $(a; b)$ et $(c; a)$ sont deux arrangements possibles de 2 éléments de E . Le couple $(a; a)$ n'est pas un arrangement car ses éléments ne sont pas distincts.
- Une course a lieu entre 20 compétiteurs. Le podium à l'issue de la course est un arrangement de 3 éléments de l'ensemble des 20 compétiteurs.

REMARQUE

Une **permutation** de E est donc un arrangement de n éléments de E .

PROPRIÉTÉ

Soient n un entier naturel non nul et k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
Le nombre d'arrangements de k éléments parmi n éléments est :

$$A_n^k = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

DÉMONSTRATION

- Il y a n choix pour le premier élément de l'arrangement, puis $n - 1$ choix restants pour le deuxième élément de l'arrangement, et ainsi de suite, jusqu'à $n - (k - 1)$ choix restants pour le k -ième.

$$\bullet \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times (n-k)!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1).$$

EXEMPLES

- Dans le premier exemple, il y a donc $\frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \times 2}{1} = 6$ arrangements possibles.
- Dans le 2^{ème} exemple, il y a donc $\frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$ podium possibles.

IV Combinaisons

1) Parties d'un ensemble

DÉFINITION

Une **partie** d'un ensemble E est un sous-ensemble de E , c'est-à-dire un ensemble constitué d'éléments de E .

EXEMPLE

Si $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, alors les ensembles $\{2; 5\}$, $\{3\}$, E et \emptyset sont des parties de E .

REMARQUE

Attention : ne pas confondre une **partie** d'un ensemble avec un **k-uplet** de cet ensemble.

Par exemple, $\{1; 2\}$ est une partie à deux éléments de l'ensemble \mathbb{N} , et on a $\{1; 2\} = \{2; 1\}$.

En revanche, $(1; 2)$ est un 2-uplet (couple) de l'ensemble \mathbb{N} et $(1; 2) \neq (2; 1)$.

THÉORÈME

Soit n un entier naturel et E un ensemble fini à n éléments.

Alors le nombre de parties de E est 2^n .

DÉMONSTRATION

Soit E' une partie de E .

Pour chaque élément de E , il y a deux choix possibles : il est dans E' , ou il ne l'est pas.

Comme E possède n éléments, cela fait 2^n possibilités pour créer E' . (*Faire un arbre*)

REMARQUE

Ce résultat, 2^n , est égal au nombre de n -uplets de l'ensemble $\{0; 1\}$.

Par exemple, si $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, alors on peut faire correspondre la partie $\{2; 5\}$ au 6-uplet $(0; 1; 0; 0; 1; 0)$.

2) Combinaisons

DÉFINITION

Soit n un entier naturel.

Soit E un ensemble fini à n éléments et soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.

On appelle **combinaison** de k éléments de E toute partie de E à k éléments.

Le nombre de combinaison de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

PROPRIÉTÉ

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

DÉMONSTRATION

On a vu que le nombre de k -uplets d'éléments tous distincts d'un ensemble à n éléments est

$$N = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$$

Or ce calcul tient compte de l'ordre des éléments dans le k -uplet, ce qui ne doit pas être le cas d'une partie (et donc d'une combinaison).

Plus précisément, on a compté à chaque fois toutes les permutations possibles de ces k éléments, et on a vu qu'il y avait $k!$ permutations possibles.

Ainsi, pour déterminer le nombre de combinaisons de k parmi n , il faut donc de diviser N par le nombre de permutations.

On obtient alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

EXEMPLE

Au loto, on choisit 5 numéros entre 1 et 50. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?

Il s'agit de compter le nombre de combinaisons possibles de 5 éléments parmi 50, soit $\binom{50}{5}$:

$$\binom{50}{5} = \frac{50!}{(50-5)! \times 5!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45!}{45! \times 5!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2\,118\,760$$

Il y a donc 2 118 760 tirages possibles au loto.

EXERCICE

Pour gagner à l'Euromillions, il faut deviner les 5 bons numéros parmi 50 nombres, et les 2 étoiles gagnantes parmi 12 étoiles. Quelle est la probabilité de gagner le premier prix à l'Euromillions ?

Réponse : 139 838 160 tirages possibles, soit une probabilité de gagner de $7,15 \times 10^{-9}$.

3) Propriétés des combinaisons

PROPRIÉTÉS

- Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Soit n un entier naturel. Alors :

$$\binom{n}{0} = 1$$

- Soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$\binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1$$

- Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n-1$. Alors la **relation de Pascal** est :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

DÉMONSTRATION

On utilise la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ pour obtenir ses résultats. (à faire en exercices)

EXERCICE

Retrouver ces résultats sans effectuer de calculs mais à l'aide de dénombrements.

4) Triangle de Pascal

Le **triangle de Pascal** permet d'obtenir rapidement les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour les premières valeurs de k et de n :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

REMARQUE

Pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

La formule ainsi obtenue est appelée la **formule du binôme de Newton** et les entiers $\binom{n}{k}$ sont appelés les **coefficients binomiaux**.