Terminale Spé Maths – Chapitre G-01

VECTEURS, DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

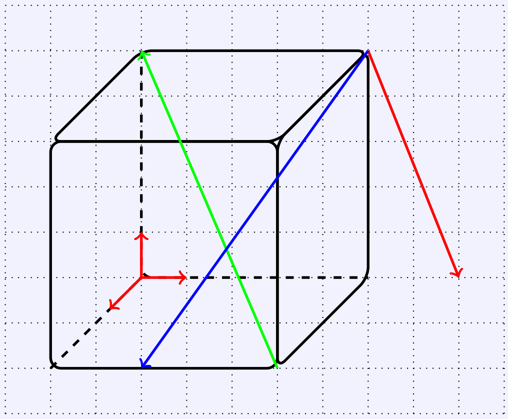
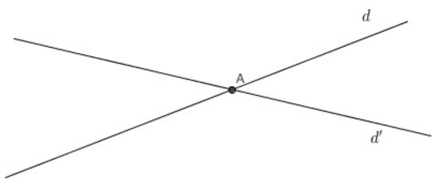
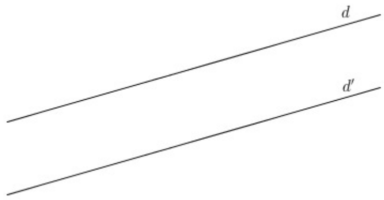
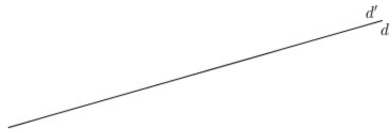
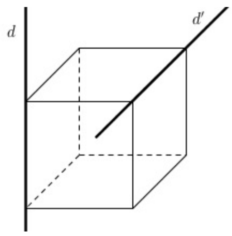


Table des matières

I Positions relatives dans l'espace

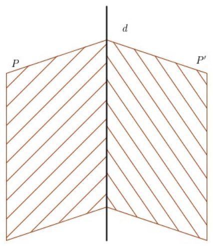
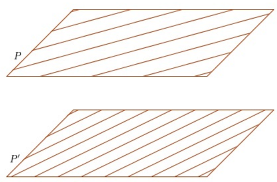
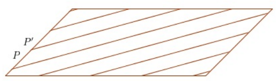
1) Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace peuvent être :

COPLANAIRES :		
SÉCANTES	**PARALLÈLES**	
 $d \cap d' = \{A\}$ d et d' sont sécantes en A.	 $d \cap d' = \varnothing$ d et d' sont (strictement) parallèles.	 $d \cap d' = d = d'$ d et d' sont confondues.
NON COPLANAIRES :		
 $d \cap d' = \varnothing$ d et d' sont non coplanaires.		

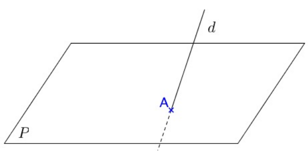
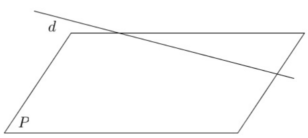
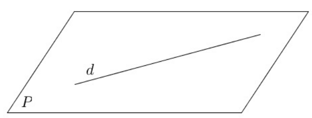
2) Positions relatives de deux plans

Deux plans de l'espace peuvent être :

SÉCANTS	**PARALLÈLES**	
 $P \cap P' = d$ P et P' sont sécants en d.	 $P \cap P' = \varnothing$ P et P' sont (strictement) parallèles.	 $P \cap P' = P = P'$ P et P' sont confondus.

3) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan de l'espace peuvent être :

SÉCANTS	**PARALLÈLES**	
 $d \cap P = \{A\}$ d et P sont sécants en A.	 $d \cap P = \varnothing$ d et P sont (strictement) parallèles.	 $d \cap P = d$ d est incluse dans P ($d \subset P$).

II Vecteurs de l'espace

1) Du plan à l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteurs :

DÉFINITION

Soient deux points distincts A et B de l'espace. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour :
- direction : celle de la droite (AB) ;
- sens : de A vers B ;
- longueur (ou *norme*) : la distance AB. On la note $||\overrightarrow{AB}||$ ou plus simplement AB.

REMARQUE

Si A et B sont confondus, alors le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, appelé vecteur nul. Sa norme vaut 0 et il n'a ni direction, ni sens.

On étend également à l'espace les opérations associées aux vecteurs (addition de deux vecteurs, multiplication d'un vecteur par un réel). Les règles de calcul sont les mêmes que dans le plan, et la relation de Chasles aussi :

PROPRIÉTÉ — admise

- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même norme.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
- Pour tout point A de l'espace et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
- La **translation** de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation qui à tout point C associe le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

PROPRIÉTÉ — admise

Règles de calculs :

Soit k un réel et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace :
- $k\overrightarrow{u} = 0 \iff k = 0$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- Si $\overrightarrow{u} \neq 0$ et $k \neq 0$, alors le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a la même direction que le vecteur $\overrightarrow{u}$, le même sens que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$,et le sens contraire si $k < 0$. Enfin, $||k\overrightarrow{u}|| = |k| \times ||\overrightarrow{u}||$.

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace :
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \iff ABDC$ est un parallélogramme.

Soit k et k' deux réels et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace :
- $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$;
- $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$;
- $(k + k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$ ... ;

2) vecteurs colinéaires

DÉFINITION

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.

REMARQUES

- On dit alors que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même direction.
- Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs de l'espace (puisque $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$).

PROPRIÉTÉ admise

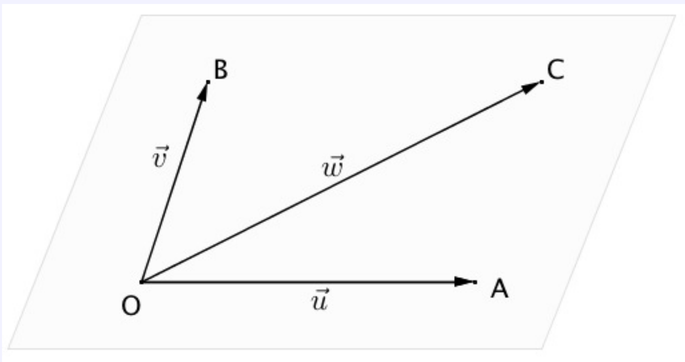
Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.
- Les points A, B, et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

3) vecteurs coplanaires

a Définition

DÉFINITION

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** si pour tout point quelconque O de l'espace, les points O, A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$ sont dans un même plan.



REMARQUE

Si deux vecteurs parmi les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont nécessairement coplanaires. En effet, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les points O, A et B sont alignés. Donc il existe au moins un plan qui contient la droite (OA) et le point C, et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc bien coplanaires.

b Combinaison linéaire

DÉFINITION

Soient deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On dit que le vecteur $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

REMARQUES

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ et par suite, les vecteurs $\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- On peut faire des combinaisons linéaires de plus de deux vecteurs.

c Théorème

THÉORÈME

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

DÉMONSTRATION

On reprend les notations de la figure ci-dessus.
Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors ce sont deux vecteurs directeurs du plan (OAB).
Par définition, « $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires » signifie que C appartient au plan (OAB).
D'après le théorème du **a)**, il existe alors deux réels a et b tels que $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$, soit $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

PROPRIÉTÉS admises

Conséquences :
- Quatre points A, B, C et D sont coplanaires $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
- Les droites (AB) et (CD) sont coplanaires $\Leftrightarrow$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
- Deux plans sont parallèles $\Leftrightarrow$ deux vecteurs non colinéaires de l'un et deux vecteurs non colinéaires de l'autre sont coplanaires.

d Vecteurs linéairement indépendants

DÉFINITION

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **linéairement indépendants** si l'un des vecteurs n'est pas une combinaison linéaire des deux autres.

PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement indépendants si et seulement si l'égalité $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$.

DÉMONSTRATION

Cette propriété étant la contraposée du théorème précédent, sa démonstration est immédiate.

III Droites et plans de l'espace

1) Caractérisation vectorielle d'une droite

DÉFINITION

On appelle **vecteur directeur** d'une droite d de l'espace, tout vecteur $\vec{u}$ non nul dont la direction est celle de la droite d.

Si A est un point de d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d, alors on dit que $(A, \vec{u})$ est un **repère** de d.

PROPRIÉTÉ — admise

Soient A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

2) Caractérisation vectorielle d'un plan

a Propriété et définition

PROPRIÉTÉ — admise

Soient A, B et C trois points non alignés dans l'espace.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires (c'est-à-dire il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$)

DÉFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires d'un plan $\mathcal{P}$, et A un point de $\mathcal{P}$.
On dit alors que $(A\,; \vec{u}, \vec{v})$ est un **repère** du plan $\mathcal{P}$ et que $(\vec{u}, \vec{v})$ est une **base** de ce plan.

b Direction d'un plan

DÉFINITION

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On appelle **direction** du plan $\mathcal{P}$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts et quelconques appartenant à $\mathcal{P}$.

c Comment définir un plan

DÉFINITION

Un plan peut être défini soit :
- par trois points distincts non alignés ;
- par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite ;
- par deux droites sécantes ;
- par deux droites strictement parallèles.

d Coplanarité de quatre points

DÉFINITION

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.
Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si ils appartiennent à un même plan.

REMARQUE

Trois points sont toujours coplanaires !

3) Règles d'incidence

PROPRIÉTÉS admises

- Deux points distincts définissent une droite et une seule.
- Trois points distincts et non alignés définissent un plan et un seul.
- Si un plan contient deux points distincts A et B, alors il contient la droite (AB).

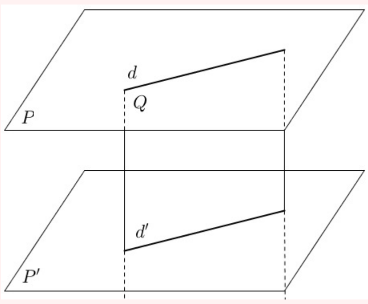
REMARQUES

- Tous les résultats établis en géométrie plane restent valables dans chaque plan de l'espace.
- Si un plan $\mathcal{P}$ contient une droite d, alors on dit que la droite d est **incluse dans $\mathcal{P}$**.

4) Deux théorèmes pour l'espace

a Le théorème d'incidence

THÉORÈME



$P//P'$
Q coupe P et P' selon deux droites parallèles d et d'.

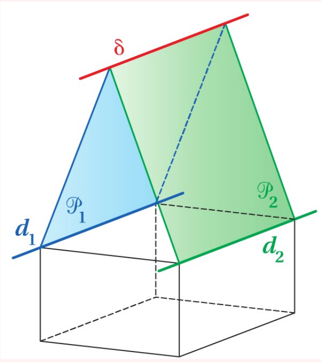
Si deux plans sont strictement parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre, et les deux droites d'intersection sont parallèles.

DÉMONSTRATION

Le plan Q est sécant avec P donc il l'est également avec P' (car s'il était parallèle à P', il aurait été aussi parallèle à P).
d et d' sont coplanaires dans Q donc elles sont soit sécantes, soit parallèles.
Or d est incluse dans P et d' est incluse dans P', et ces deux plans sont strictement parallèles, donc ils n'ont pas de point commun, donc d et d' non plus. Donc ces deux droites ne sont pas sécantes : elles sont donc parallèles.

b Le théorème du toit

THÉORÈME



Soit d_1 et d_2 deux droites parallèles, P_1 et P_2 deux plans distincts tels que d_1 est contenue dans P_1 et d_2 dans P_2.

Si P_1 et P_2 sont sécants, alors la droite Δ d'intersection est parallèle à d_1 et d_2.

DÉMONSTRATION

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de d_1 et donc aussi de d_2 (puisque $d_1 // d_2$).
$d_1 \subset P_1$ et $d_2 \subset P_2$, donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de P_1 et de P_2.
Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de Δ. Ainsi, $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de P_1 et de P_2.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de P_1 et de P_2, donc P_1 et P_2 sont parallèles, ce qui est impossibles puisqu'ils sont sécants selon la droite Δ.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et Δ est parallèle à d_1 et à d_2.

IV Base et repérage dans l'espace

1) Bases de l'espace

DÉFINITION

Une base de l'espace est formée par trois vecteurs non coplanaires.

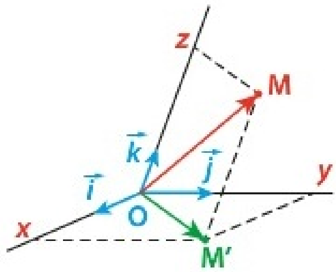
PROPRIÉTÉ

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet de réels $(x\,;y\,;z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

DÉMONSTRATION

1) Existence :

Soit O un point de l'espace et M le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



Les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ étant non coplanaires, le plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et la droite $\Delta(M;\vec{k})$ ne sont pas parallèles.
Soit M' le point d'intersection plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et de la droite Δ.

M' est un point du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ donc il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{OM'} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, il existe donc un réel z tel que $\overrightarrow{MM'} = z\vec{k}$.

Or d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$ donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.

2) Unicité :

Supposons qu'il existe un autre triplet de réels $(x';y';z')$ tel que $\vec{u} = x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$.
Alors $(x-x')\vec{\imath} + (y-y')\vec{\jmath} + (z-z')\vec{k} = \vec{0}$.
Or les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, donc $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

PROPRIÉTÉS — admises

Soient deux vecteurs $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ dans une base de l'espace et soit α un réel.
- $\vec{u} = \vec{v} \iff x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées dans cette base $(x+x';y+y';z+z')$.
- $\alpha\vec{u}$ a pour coordonnées $(\alpha x;\alpha y;\alpha z)$.

2) Repère de l'espace

DÉFINITION

Un repère de l'espace est un quadruplet composé d'un point O (origine du repère) et d'une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace. On le note $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

3) Coordonnées dans l'espace

THÉORÈME — admis

Soit $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x;y;z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.
Ces trois réels sont les coordonnées du point M dans le repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
x est l'**abscisse**, y l'**ordonnée** et z la **cote** de M dans ce repère.

4) Calculs sur les coordonnées

Tous les résultats établis en géométrie plane s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une 3e coordonnée :

PROPRIÉTÉS — admises

Dans un repère $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **:**
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x;y;z)$ et $(x';y';z')$, alors :
- Pour tout réel k, le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx;ky;kz)$.
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x';y+y';z+z')$.

- Si A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A;y_A;z_A)$ et $x_B;y_B;z_B)$, alors :
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$.
- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

PROPRIÉTÉ — admise

Dans un repère orthonormé $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ **:**
$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

V Représentations paramétriques

Dans toute cette partie, l'espace est muni d'un repère $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ quelconque.

1) Représentation paramétrique d'une droite

THÉORÈME

Soit d une droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a;b;c)$.
Alors d est l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

DÉMONSTRATION

$M(x;y;z) \in d$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, si et seulement si :
$x - x_A = at$, $y - y_A = bt$ et $z - z_A = ct$, $t \in \mathbb{R}$.

REMARQUES

- Le système obtenu est appelé **une représentation paramétrique** de la droite d dans le repère $(0;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. t est appelé le paramètre. (On peut utiliser toute autre lettre)
- A chaque valeur de t, on associe un point $M(x_A+at;y_A+bt;z_A+ct)$ et un seul.

Réciproquement, à chaque point M de d correspond une unique valeur de t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

PROPRIÉTÉ admise

Conséquence :

Si $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique d'une droite d, alors on peut affirmer que d passe par le point $A(x_0; y_0; z_0)$ et que $\vec{u}(a; b; c)$ est un vecteur directeur de d.

EXEMPLE

Soit d une droite dont une représentation paramétrique est : $d : \begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les coordonnées d'un point M quelconque de la droite d.
2. Le point $P(-6; -4; -1)$ appartient-il à la droite d ?

EXERCICE

Soit $A(1; -2; 3)$ et $B(0; 0; 1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de (AB).
2. $C(-3; 6; -5)$ et $D(2; -5; 5)$ appartiennent-ils à la droite (AB) ?
3. Déterminer l'intersection de la droite (AB) avec le plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2) Représentation paramétrique d'un plan

THÉORÈME

Soit P un plan caractérisé par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et deux vecteurs $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$ non colinéaires.
Alors P est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + at + \alpha t' \\ y = y_A + bt + \beta t' \\ z = z_A + ct + \gamma t' \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \text{ et } t' \in \mathbb{R}.$$

(représentation paramétrique de P)

DÉMONSTRATION

$M(x; y; z) \in P$ si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$, si et seulement si $x - x_A = at + \alpha t'$, $y - y_A = bt + \beta t'$ et $z - z_A = ct + \gamma t'$, d'où le résultat.