

Terminale Spé Maths – Chapitre A-09

CALCUL INTÉGRAL

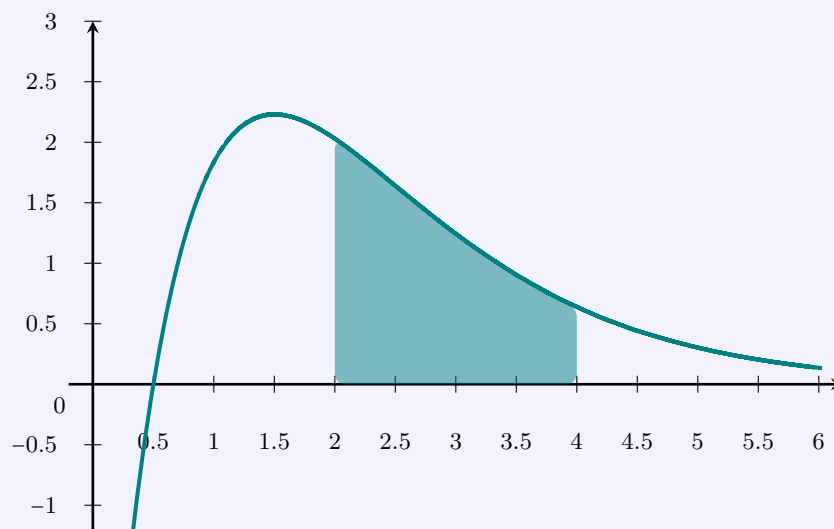


Table des matières

I	Définition de l'intégrale d'une fonction	2
1)	Cas d'une fonction continue positive sur $[a; b]$	2
2)	Cas d'une fonction continue négative sur $[a; b]$	4
3)	Cas d'une fonction changeant de signe sur $[a; b]$	4
4)	Retour sur un théorème	4
II	Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive	5
III	Propriétés des intégrales	6
1)	Relation de Chasles	6
2)	Linéarité	7
3)	Intégrales et inégalités	7
IV	Intégration par parties	8
V	Applications du calcul intégral	9
1)	Aire délimitée par deux courbes	9
2)	Valeur moyenne d'une fonction	10

I Définition de l'intégrale d'une fonction

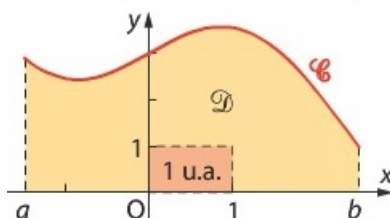
1) Cas d'une fonction continue positive sur $[a; b]$

a) Aire sous la courbe

DÉFINITION

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$, avec a et b deux réels tels que $a < b$. On appelle **intégrale de f sur $[a; b]$** le nombre qui exprime l'aire, en unité d'aire (u.a.), du domaine D délimité par la courbe C_f de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

On note : $\int_a^b f(t) dt = \text{aire}(D)$.



REMARQUES

- $\int_a^b f(t) dt$ se lit « somme de a à b de $f(t) dt$ » ou « intégrale de a à b de $f(t) dt$ ».
- On note indifféremment $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b f(u) du$...

b) Premiers calculs d'intégrales

faire une figure à chaque fois :

- Calculer $I = \int_{-1}^3 \frac{3}{2} dx$ ($= 4 \times \frac{3}{2} = 6$)
- Calculer $J = \int_1^3 t dt$ ($= 4$)
- Calculer $K = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ($= \frac{\pi}{2}$)

c) Un exemple plus complexe

Comment calculer $\int_0^1 e^x dx$?

Partageons l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$. Plus n sera grand, plus la précision sera bonne.

Alors l'aire sous la courbe de la fonction \exp entre 0 et 1, $\int_0^1 e^x dx$, est encadrée par deux sommes de rectangles

telles que : $m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq \int_0^1 e^x dx \leq M_1 + M_2 + \dots + M_n$.

On a $m_1 = \frac{1}{n}$, $m_2 = \frac{1}{n} \times e^{\frac{1}{n}}$, $m_3 = \frac{1}{n} \times e^{\frac{2}{n}}$, ..., $m_n = \frac{1}{n} e^{\frac{n-1}{n}}$

Et $M_1 = m_2$, $M_2 = m_3$, ..., $M_{n-1} = m_n$ et $M_n = \frac{1}{n} \times e^1$.

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} e^{\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{n} e^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_0^1 e^x dx \leq \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} e^{\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{n} e^1$$

$$\frac{1}{n} \left(1 + e^{\frac{1}{n}} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \dots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} \right) \leq \int_0^1 e^x dx \leq \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \dots + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n \right)$$

$$\frac{1}{n} \times \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}} \leq \int_0^1 e^x dx \leq \frac{1}{n} \times e^{\frac{1}{n}} \times \frac{1 - \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$\frac{1}{n} \times \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}} \leq \int_0^1 e^x dx \leq \frac{1}{n} \times e^{\frac{1}{n}} \times \frac{1 - e}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$$

$$\boxed{(e-1) \frac{1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \leq \int_0^1 e^x dx \leq e^{\frac{1}{n}} (e-1) \frac{1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}}$$

$$\frac{1}{n} - 0 \qquad \frac{1}{n} - 0$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{N \rightarrow 0} \frac{e^N - 1}{N - 0} = \exp'(0) = 1$, donc par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n} - 1} = 1$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e-1) \frac{1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e-1$. De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ donc on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} (e-1) \frac{1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e-1$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^x dx = e-1$. Mais $\int_0^1 e^x dx$ ne dépendant pas de n , alors on

peut en conclure que $\int_0^1 e^x dx = e-1$.

d) Dérivabilité d'une fonction aire

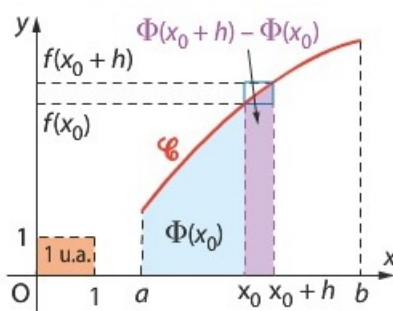
THÉORÈME

Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$, avec a et b deux réels tels que $a < b$. Alors la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée $f : \forall x \in [a; b], F'(x) = f(x)$.

DÉMONSTRATION

Démonstration dans le cas où f est croissante sur un intervalle fermé $[a; b]$:
(Le résultat est admis dans le cas général)

Soit $x_0 \in [a; b]$ et h un réel tel que $x_0 + h \in [a; b]$.



(Remplacer Φ par F)

• Si $h > 0$:

f est croissante donc $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$, et $F(x_0 + h) - F(x_0)$ exprime l'aire sous la courbe de f sur $[x_0; x_0 + h]$.

On encadre cette aire par celles de deux rectangles de même largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$:

$$h \times f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \times f(x_0 + h).$$

D'où $f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$ (puisque $h > 0$ ici)

Or f est continue en x_0 , donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$.

Ainsi, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Ce résultat est vrai pour tout $x_0 \in [a; b]$ donc F est dérivable sur $[a; b]$ et $F' = f$.

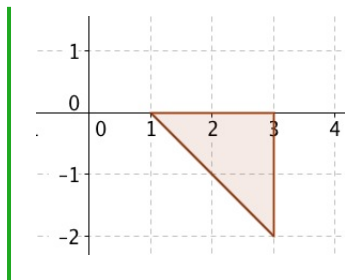
• Si $h < 0$: A faire en exercice ! (peu de changement, uniquement dans l'encadrement, signe etc.)

2) Cas d'une fonction continue négative sur $[a; b]$

DÉFINITION

Soit f une fonction **continue et négative** sur un intervalle $[a; b]$ avec a et b deux réels tels que $a < b$.
 On note $\int_a^b f(x) dx$ l'opposée de l'aire délimitée par la courbe C_f de f , l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
 On dit qu'il s'agit de l'**aire algébrique** de ce domaine.

EXEMPLE



Soit f la fonction définie sur $[1; 3]$ par $f(x) = 1 - x$.

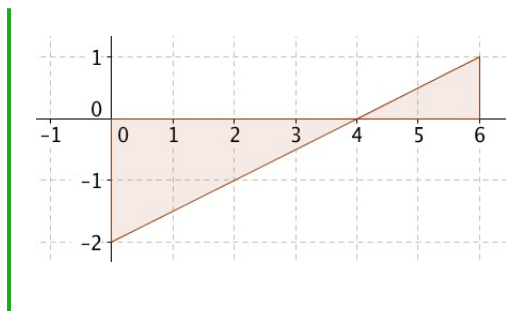
f est négative sur $[1; 3]$ donc $\int_1^3 f(x) dx = -2$.

3) Cas d'une fonction changeant de signe sur $[a; b]$

DÉFINITION

Soit f une fonction **continue, de signe quelconque** sur $[a; b]$, avec a et b deux réels.
 On note $\int_a^b f(x) dx$ la somme des aires algébriques des domaines définis à partir des intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

EXEMPLE



Soit f la fonction définie sur $[0; 6]$ par $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

f est négative sur $[0; 4]$ et positive sur $[4; 6]$ (on le prouve rapidement en résolvant une inéquation).

Donc $\int_0^6 f(x) dx = -\frac{4 \times 2}{2} + \frac{2 \times 1}{2} = -4 + 1 = -3$.

EXERCICE

Calculer $\int_{-4}^4 x^3 dx$

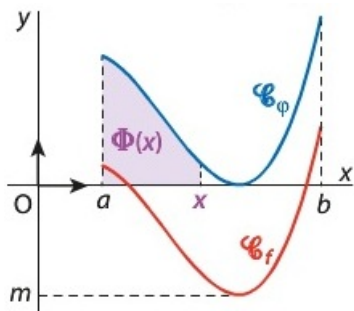
4) Retour sur un théorème

THÉORÈME

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

DÉMONSTRATION

Principe de la démonstration - EXIGIBLE BAC !!



On se place dans le cas où I est un intervalle fermé $[a; b]$.

On admet le résultat suivant : toute fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ admet un minimum et un maximum sur $[a; b]$.

Soit f une fonction continue sur I et m son minimum sur I . Alors pour tout $x \in I$, $f(x) - m \geq 0$.

Soit ϕ la fonction $x \mapsto f(x) - m$. ϕ est continue et positive sur I , donc il existe une fonction Φ définie sur I tel que $\forall x \in I$, $\Phi'(x) = \phi(x) = f(x) - m$.

Alors, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est dérivable sur I et $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$. Ainsi, F est une primitive de f sur I .

II Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive

On admet que le théorème vu en I.1) d) peut être étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque :

THÉORÈME

admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I .

Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f sur I .

REMARQUE

$F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ donc F est la primitive de f « qui s'annule en a ».

Conséquence pour calculer une intégrale :

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , soit F une primitive de f sur I , et soit a et b deux réels quelconques de I .

On appelle **intégrale de la fonction f entre a et b** le nombre $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

DÉMONSTRATION

f est une fonction continue sur I et F une primitive de f sur I . On cherche à calculer $\int_a^b f(t) dt$.

D'après le théorème précédent, on sait qu'il existe une primitive G de f sur I telle que

$G(x) = \int_a^x f(t) dt$. Ainsi, il existe un réel k tel que $F(x) = G(x) + k$.

Or $G(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, donc $F(a) = G(a) + k$ d'où $k = F(a) - G(a) = F(a) - 0 = F(a)$.

Donc $\int_a^b f(t) dt = G(b) = F(b) - k = F(b) - F(a)$.

REMARQUES

- On écrit $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.
- $\int_b^a f(t) dt = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t) dt$.

EXEMPLES

- $\int_{-2}^5 3 dx = [3x]_{-2}^5 = 15 - (-6) = 21$.
- $\int_1^{-1} u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^{-1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$.
- $\int_{-1}^0 e^t dt = [e^t]_{-1}^0 = 1 - \frac{1}{e}$.
- $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2$.
- $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{t} dt = [\ln(-t)]_{-2}^{-1} = 0 - \ln 2 = -\ln 2$.
- $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.
- $\int_e^{e^3} \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^3} = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$.

III Propriétés des intégrales

1) Relation de Chasles

THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Pour tous réels a , b et c dans I , $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I .

Alors $\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = |x| - 2$. Calculer $\int_{-2}^5 f(x) dx$.

$f(x) = x - 2 \Leftrightarrow x \geq 0$ et $f(x) = -x - 2 \Leftrightarrow x < 0$. Donc :

$$\int_{-2}^5 f(x) dx = \int_{-2}^0 (-x - 2) dx + \int_0^5 (x - 2) dx$$

$$\int_{-2}^5 f(x) dx = \left[-\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^0 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^5$$

$$\int_{-2}^5 f(x) dx = (0 - (-2 + 4)) - \left(\left(\frac{25}{2} - 10 \right) - 0 \right) = -2 - \frac{5}{2} = -\frac{9}{2}$$

2) Linéarité

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions continue sur un intervalle I .

Pour tous réels a et b dans I , et pour tout réel λ , on a :

$$\bullet \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \bullet \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

DÉMONSTRATION

Soient F et G deux fonctions primitives respectives de f et de g sur I :

• $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I donc :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = (F + G)(b) - (F + G)(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

• λF est une primitive de λf sur I donc :

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = (\lambda F)(b) - (\lambda F)(a) = \lambda(F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

EXEMPLE

Soit $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx$ et $K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x dx$.

1) Calculer $J + K$ et $J - K$ (On admettra le résultat suivant : pour tout réel x , $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$).

2) En déduire J et K .

$$J + K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 x + \sin^2 x) dx = \frac{\pi}{6}$$

$$J - K = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Ainsi, on résout le système } \begin{cases} J + K = \frac{\pi}{6} \\ J - K = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2J = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 2K = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8} \\ K = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$$

3) Intégrales et inégalités

PROPRIÉTÉ

Positivité :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Soient a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

Si pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

DÉMONSTRATION

f est positive sur $[a; b]$ donc $\int_a^b f(x) dx$ exprime l'aire (en u.a.) sous la courbe de f . D'où le résultat.

PROPRIÉTÉ**Ordre :**

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I .

Soient a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

Si pour tout x de $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

DÉMONSTRATION

$\forall x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, donc $g(x) - f(x) \geq 0$.

Ainsi, d'après la propriété de positivité, $\int_a^b (g - f)(x) dx \geq 0$.

Ainsi, par linéarité de l'intégration, $\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$. Donc $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

REMARQUES

- Les réciproques de ces deux propriétés sont fausses.
- Par extension, le résultat reste valable avec trois fonctions f , g et h continues sur I :

Si $\forall x \in [a; b]$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, alors $\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx$.

EXEMPLE

Soit $J = \int_0^2 \sqrt{1+x^2} dx$.

- 1) Montrer que $\forall x \in [0; 2]$, $x \leq \sqrt{1+x^2} \leq x+1$.
- 2) En déduire un encadrement de J .

Correction :

- 1) $\forall x \in [0; 2]$, $x^2 \leq 1+x^2 \leq 1+2x+x^2$.

Or la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0; 2]$ donc $|x| \leq \sqrt{1+x^2} \leq |1+x|$.

Donc $\forall x \in [0; 2]$, $x \leq \sqrt{1+x^2} \leq 1+x$.

- 2) On intègre les inégalités obtenues à la question précédente sur $[0; 2]$:

$$\int_0^2 x dx \leq J \leq \int_0^2 (x+1) dx$$

$$\text{Donc } \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \leq J \leq \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^2.$$

$$\text{Donc } 2 \leq J \leq 4.$$

IV Intégration par parties**THÉORÈME**

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I . Soient a et b deux réels de I . Alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

DÉMONSTRATION

Les fonctions u et v sont dérivables sur I , donc leur produit l'est également et on a $(uv)' = u'v + uv'$. Les fonctions u et v sont dérivables donc continues sur I , ainsi que les fonctions u' et v' (par hypothèse du théorème), donc les fonctions $(uv)'$, $u'v$ et uv' sont également continues et admettent ainsi des primitives sur I .

$$\text{Donc } \int_a^b (uv)'(x) \, dx = \int_a^b [(u'v)(x) + (uv')(x)] \, dx.$$

$$\text{Donc } [(uv)(x)]_a^b = \int_a^b (u'v)(x) \, dx + \int_a^b (uv')(x) \, dx \text{ (linéarité de l'intégrale).}$$

$$\text{Donc } \int_a^b (u'v)(x) \, dx = [(uv)(x)]_a^b - \int_a^b (uv')(x) \, dx,$$

$$\text{soit } \int_a^b u'(x)v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

EXEMPLE

$$\text{Calculer } \int_{-1}^0 x e^x \, dx$$

EXERCICE

Les questions sont indépendantes.

1) Calculer $J = \int_{-\pi}^{\pi} x(\sin x) \, dx$.

2) Calculer $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x) e^x \, dx$.

3) Déterminer une primitive de la fonction \ln .

V Applications du calcul intégral

1) Aire délimitée par deux courbes

PROPRIÉTÉ

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a; b]$ et telles que pour tout réel x de $[a; b]$, $f(x) \geq g(x)$.

L'aire, en u.a., du domaine délimité par les courbes représentatives de f et de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

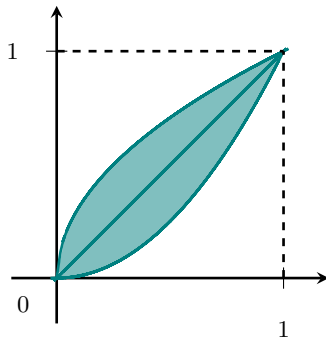
(Faire une figure)

DÉMONSTRATION

(Dans le cas où les fonctions f et g sont positives sur l'intervalle $[a; b]$)

Pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq g(x)$, donc l'aire entre les deux courbes est la différence entre l'aire sous la courbe de f et celle sous la courbe de g , soit $\int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$ (d'après la propriété de linéarité).

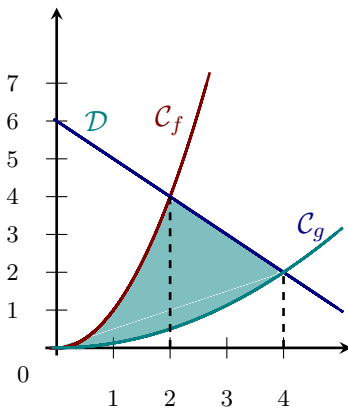
EXEMPLE



On a tracé ci-contre les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto x^2$ sur $[0; 1]$.

- 1) Calculer l'aire du domaine, en u.a, délimité par la courbe de la fonction $x \mapsto x^2$, la droite d'équation $y = x$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
- 2) En déduire l'aire du domaine coloré.

EXERCICE



Soient \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{x^2}{8}$ dans un repère orthogonal d'unité 1 cm.

La droite \mathcal{D} a pour équation $y = 6 - x$.

Démontrer que l'aire du domaine coloré est 6 cm^2 .

2) Valeur moyenne d'une fonction

a) Définition

DÉFINITION

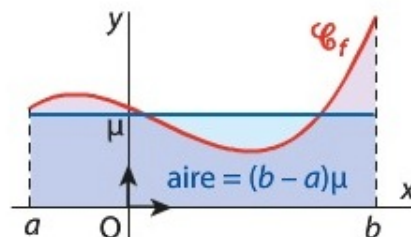
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, $a < b$.

La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre noté μ défini par $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Interprétation dans le cas d'une fonction positive :

La valeur moyenne μ est telle que $\int_a^b f(x) dx = (b-a)\mu$.

Ainsi, lorsque f est positive sur $[a; b]$, le nombre μ peut être interprété comme la hauteur du rectangle construit sur $[a; b]$ et ayant la même aire que le domaine D située sous la courbe \mathcal{C}_f .



EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 5$.

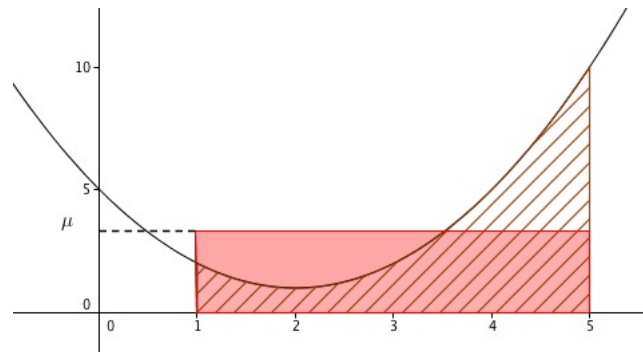
- 1) Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1; 5]$.
- 2) Tracer C_f sur $[1; 5]$ et interpréter graphiquement.

Correction :

$$1) \mu = \frac{1}{5-1} \int_1^5 (x^2 - 4x + 5) dx = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x \right]_1^5.$$

$$\text{Donc } \mu = \frac{1}{4} \left(\frac{50}{3} - \frac{10}{3} \right) = \frac{10}{3}. \text{ Donc } \mu = \frac{10}{3}.$$

- 2) $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$ donc C_f est une parabole orientée vers le bas et de sommet $A(2; 1)$:



L'aire sous la courbe est égale à l'aire du rectangle rouge.

b) Inégalité de la moyenne**THÉORÈME**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b sont deux réels de I tels que $a < b$.
Soit M et m deux réels tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

DÉMONSTRATION

$\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$.

Les fonctions constantes $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ sont telles que : $\int_a^b m dx = [mx]_a^b = m(b-a)$ et

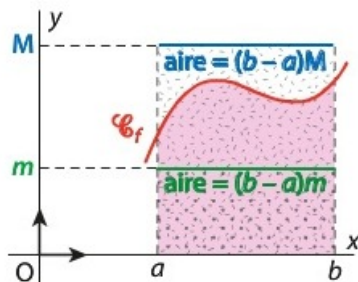
$$\int_a^b M dx = M(b-a).$$

Or $a < b$ donc d'après la propriété d'ordre vu précédemment, on a :

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx, \text{ soit } m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Interprétation dans le cas d'une fonction positive :

Si f est bornée sur $[a; b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne signifie que l'aire sous la courbe C_f sur $[a; b]$ est comprise entre les aires des rectangles construits sur $[a; b]$ et de hauteurs respectives m et M .



REMARQUE

Encadrement de la valeur moyenne : en divisant chaque membre de $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ par le nombre strictement positif $b-a$, on obtient $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$, c'est-à-dire un encadrement de la valeur moyenne de f sur $[a; b]$: $m \leq \mu \leq M$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$ sur $]1; +\infty[$.

Encadrer à $0,01$ près la valeur moyenne de f sur $[2; 4]$.

Correction :

f est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $f'(x) = \dots = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

Donc $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 1$, donc $f' < 0$ sur $]1; e[$ et $f' > 0$ sur $]e; +\infty[$.

Donc f est strictement décroissante sur $]1; e]$ et strictement croissante sur $]e; +\infty[$.

- f strictement décroissante sur $[2; e]$ donc $\forall x \in [2; e]$, $f(e) \leq f(x) \leq f(2)$, soit $2 \leq f(x) \leq \frac{2}{\ln 2}$.
- f strictement croissante sur $[e; 4]$ donc $\forall x \in [e; 4]$, $f(e) \leq f(x) \leq f(4)$, soit $e \leq f(x) \leq \frac{2}{\ln 2}$.

Enfin : $\forall x \in [2; 4]$, $e \leq f(x) \leq \frac{2}{\ln 2}$.

On a donc : $e \leq \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx \leq \frac{2}{\ln 2}$

D'où $2,71 \leq \frac{1}{2} \int_2^4 f(x) dx \leq 2,89$.