Terminale Spé Maths – Chapitre A-08

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

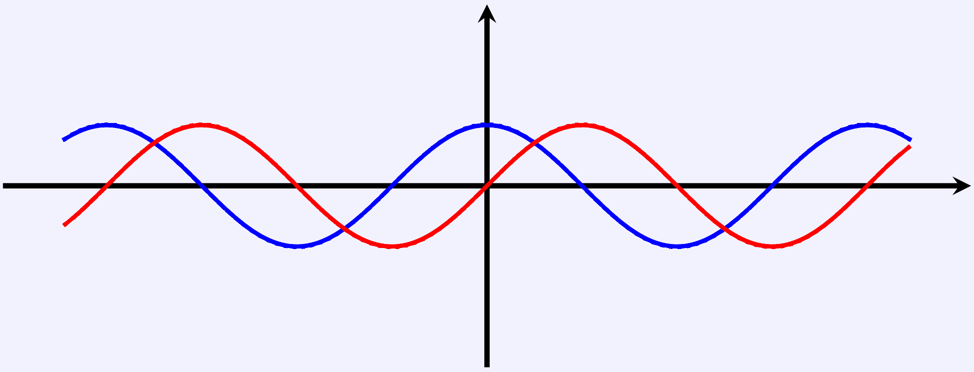
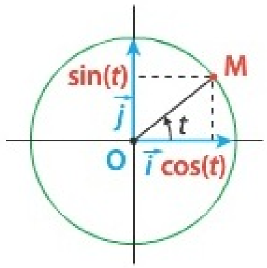


Table des matières

I Fonction sinus et fonction cosinus

1) Définition



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
A tout réel t, on associe un unique point M du cercle trigonométrique de centre O tel que $t = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ (mesure de l'angle orienté en radians).
Le point M a pour coordonnées $(\cos t\,; \sin t)$.

Remarque : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$.

DÉFINITION

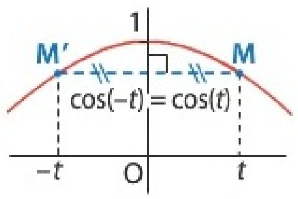
• La fonction qui a tout réel x fait correspondre l'abscisse $\cos x$ du point M est appelée la fonction cosinus et est notée cos.
• La fonction qui a tout réel x fait correspondre l'ordonnée $\sin x$ du point M est appelée la fonction sinus et est notée sin.

2) Propriétés des fonctions sinus et cosinus

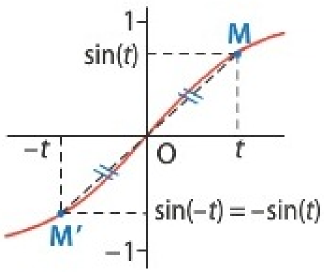
PROPRIÉTÉ — admise

• Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos x$: on dit que la fonction cosinus est **paire** sur $\mathbb{R}$.
• Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin x$: on dit que la fonction sinus est **impaire** sur $\mathbb{R}$.

Interprétation graphique :
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



• Les points $M(x; \cos x)$ et $M'(-x; \cos(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O; \vec{\jmath})$. La courbe représentative de la fonction cosinus est donc **symétrique par rapport à l'axe** $(O; \vec{\jmath})$.

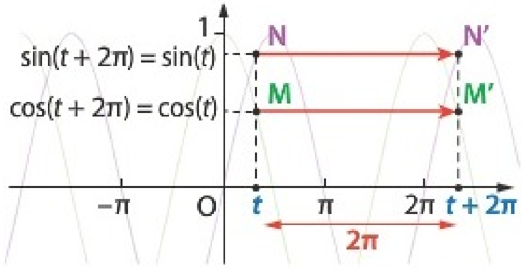


• Les points $M(x; \sin x)$ et $M'(-x; \sin(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. La courbe représentative de la fonction sinus est donc **symétrique par rapport à l'origine O du repère**.

PROPRIÉTÉ — admise

Pour tout réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période** 2π (ou « 2π-périodiques »).

Conséquences graphiques :



$M(x; \cos x)$ et $M'(x+2\pi; \cos(x+2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{MM'} = 2\pi\vec{\imath}$.
$N(x; \sin x)$ et $N'(x+2\pi; \sin(x+2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{NN'} = 2\pi\vec{\imath}$.
Il suffit donc d'étudier les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de longueur 2π. Mais de plus, les fonctions sin et cos étant respectivement impaires et paires sur $\mathbb{R}$, par symétrie, on peut restreindre leur étude sur un intervalle de longueur π.

II Étude de la fonction sinus

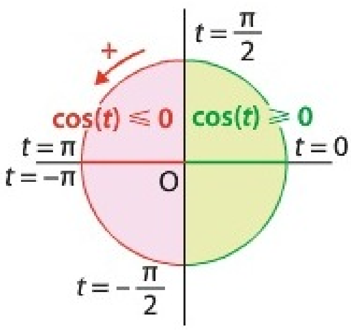
1) Dérivée

PROPRIÉTÉ admise

La fonction sinus est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$.

2) Sens de variation

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$:



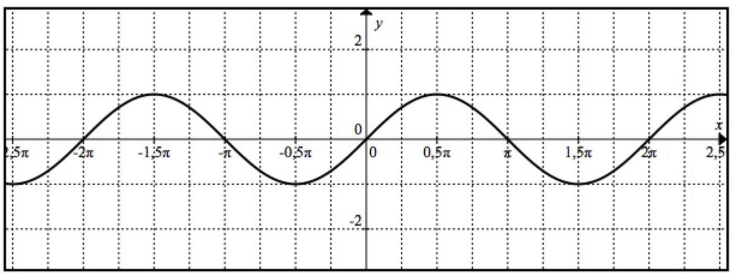
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$+$	0	$-$	
sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On en déduit alors le sens de variations de la fonction sinus sur $[-\pi\,;\pi]$ par symétrie centrale par rapport à O :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) Courbe représentative

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$



III Étude de la fonction cosinus

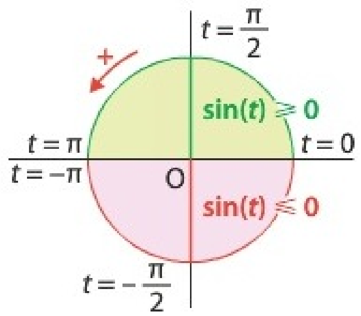
1) Dérivée

PROPRIÉTÉ — admise

La fonction cosinus est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos' x = -\sin x$.

2) Sens de variation

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$:



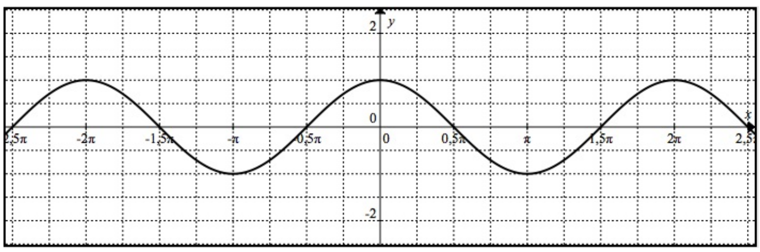
x	0		π
$\cos' x = -\sin x$	0	$-$	0
$\cos$	1	$\searrow$	-1

On en déduit alors le sens de variations de la fonction cosinus sur $[-\pi\,;\pi]$ par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées :

x	$-\pi$		0		π
$\cos$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

3) Courbe représentative

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$



IV Compléments sur les fonctions trigonométriques

1) Limites

PROPRIÉTÉ

Les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limites en $+\infty$ ou en $-\infty$.

DÉMONSTRATION

• Montrons que les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite infinie :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ donc si ces fonctions admettent une limite ℓ, alors $-1 \leqslant \ell \leqslant 1$.
Donc $\ell \neq -\infty$ et $\ell \neq +\infty$.

• Montrons par l'absurde que les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite finie :
Supposons que la fonction sinus admette, quand x tend vers $+\infty$, une limite finie notée ℓ, compris entre -1 et 1 (d'après ci-dessus).
Alors pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, il existe un réel M tel que $\forall x \geqslant M$, $\sin x \in I$.
Prenons $I =]\ell - 0,1\,;\ell + 0,1[$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geqslant M$, $\ell - 0,1 < \sin x < \ell + 0,1$.
Or l'intervalle $[M\,;+\infty[$ contient une infinité de réels sous la forme $\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ dont le sinus vaut 1 et une infinité de réels sous la forme $-\dfrac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ dont le sinus vaut -1. Ainsi, l'intervalle I devrait contenir à la fois 1 et -1, ce qui est impossible car l'amplitude de l'intervalle est de $\ell + 0,1 - (\ell - 0,1) = 0,2$.
Donc la fonction sinus n'a pas de limite finie en $+\infty$.
(idem pour la fonction cosinus et en $-\infty$)

REMARQUE

En revanche, une fonction « contenant » un sinus ou un cosinus peut admettre une limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.

EXEMPLES

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + \cos(x))$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

2) Dérivée de $\cos u$ et $\sin u$

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur I et on a $(\cos u)' = -u' \sin u$ et $(\sin u)' = u' \cos u$.

DÉMONSTRATION

La démonstration est immédiate à partir de la dérivée de deux fonctions composées vue précédemment.

EXEMPLE

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x^2 + 1)$ et $g(x) = \dfrac{\cos(1 + e^x)}{e^x}$.
Déterminer pour tout réel x, $f'(x)$ et $g'(x)$.

3) Résolution d'équations et d'inéquations

PROPRIÉTÉ **admise**

Soient a et x deux nombres réels.

- $\cos(x) = \cos(a) \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(x) = \sin(a) \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLES

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$.
- Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$, puis dans $[0\,;3\pi]$, l'équation : $\sqrt{2}\sin(x) + 3 = 2$.

EXERCICE

Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ puis dans $]0\,;2\pi]$ l'inéquation : $\cos(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.