

Terminale Spé Maths – Chapitre A-08

FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

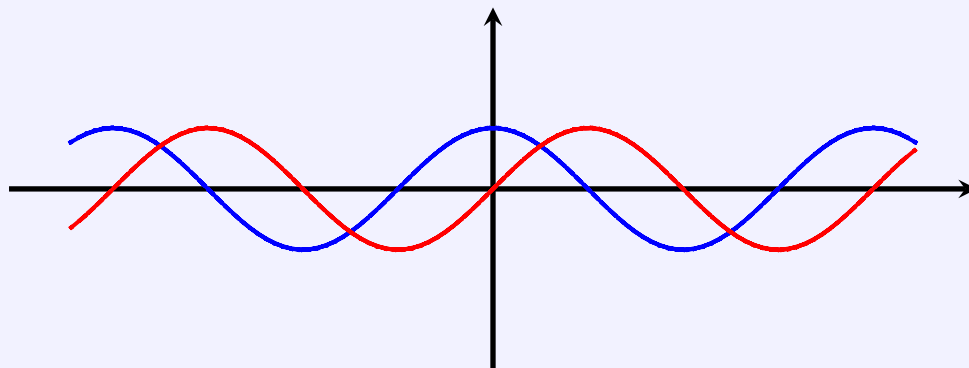
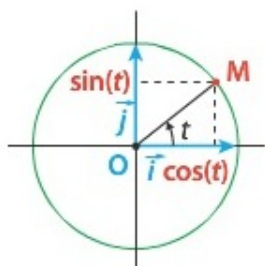


Table des matières

I	Fonction sinus et fonction cosinus	2
1)	Définition	2
2)	Propriétés des fonctions sinus et cosinus	2
II	Étude de la fonction sinus	3
1)	Dérivée	3
2)	Sens de variation	3
3)	Courbe représentative	3
III	Étude de la fonction cosinus	4
1)	Dérivée	4
2)	Sens de variation	4
3)	Courbe représentative	4
IV	Compléments sur les fonctions trigonométriques	5
1)	Limites	5
2)	Dérivée de $\cos u$ et $\sin u$	5
3)	Résolution d'équations et d'inéquations	6

I Fonction sinus et fonction cosinus

1) Définition



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A tout réel t , on associe un unique point M du cercle trigonométrique de centre O tel que $t = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ (mesure de l'angle orienté en radians). Le point M a pour coordonnées $(\cos t; \sin t)$.

Remarque : $\forall t \in \mathbb{R}, 1 \leq \cos t \leq 1$ et $-1 \leq \sin t \leq 1$.

DÉFINITION

- La fonction qui a tout réel x fait correspondre l'abscisse $\cos x$ du point M est appelée la fonction cosinus et est notée \cos .
- La fonction qui a tout réel x fait correspondre l'ordonnée $\sin x$ du point M est appelée la fonction sinus et est notée \sin .

2) Propriétés des fonctions sinus et cosinus

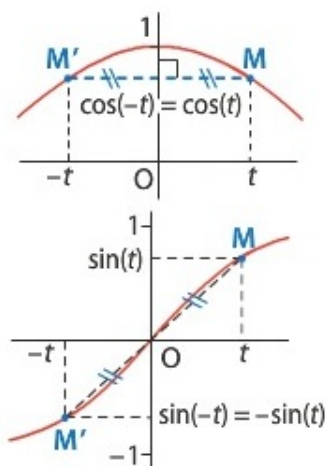
PROPRIÉTÉ

admise

- Pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos x$: on dit que la fonction cosinus est **paire** sur \mathbb{R} .
- Pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin x$: on dit que la fonction sinus est **impaire** sur \mathbb{R} .

Interprétation graphique :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



• Les points $M(x; \cos x)$ et $M'(-x; \cos(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$. La courbe représentative de la fonction cosinus est donc **symétrique par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$** .

• Les points $M(x; \sin x)$ et $M'(-x; \sin(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. La courbe représentative de la fonction sinus est donc **symétrique par rapport à l'origine O du repère**.

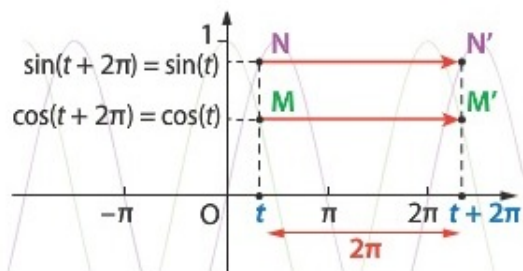
PROPRIÉTÉ

admise

Pour tout réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques de période 2π** (ou « 2π -périodiques »).

Conséquences graphiques :



$M(x; \cos x)$ et $M'(x + 2\pi; \cos(x + 2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{MM'} = 2\pi\vec{i}$.
 $N(x; \sin x)$ et $N'(x + 2\pi; \sin(x + 2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{NN'} = 2\pi\vec{i}$.
 Il suffit donc d'étudier les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de longueur 2π . Mais de plus, les fonctions sin et cos étant respectivement impaires et paires sur \mathbb{R} , par symétrie, on peut restreindre leur étude sur un intervalle de longueur π .

II Étude de la fonction sinus

1) Dérivée

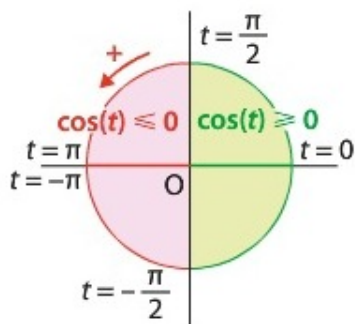
PROPRIÉTÉ

admise

La fonction sinus est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$.

2) Sens de variation

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier la fonction sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$:



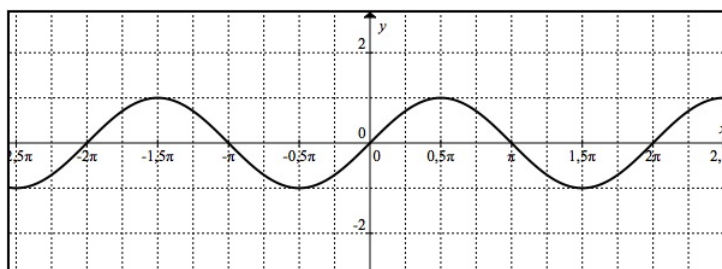
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin' x = \cos x$	+	0	-
sin	0	1	0

On en déduit alors le sens de variations de la fonction sinus sur $[-\pi; \pi]$ par symétrie centrale par rapport à O :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	-1	1	0

3) Courbe représentative

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$



III Étude de la fonction cosinus

1) Dérivée

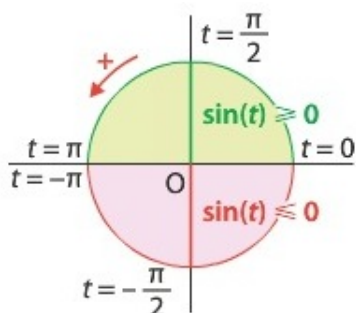
PROPRIÉTÉ

admise

La fonction cosinus est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos' x = -\sin x$.

2) Sens de variation

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier la fonction cosinus sur l'intervalle $[0; \pi]$:



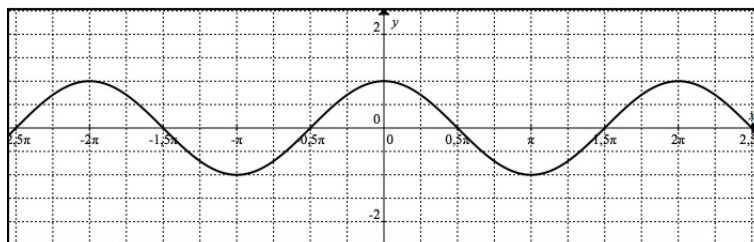
x	0		π
$\cos' x = -\sin x$	0	-	0
cos	1		-1

On en déduit alors le sens de variations de la fonction cosinus sur $[-\pi; \pi]$ par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées :

x	$-\pi$	0	π
cos	-1	1	-1

3) Courbe représentative

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$



IV Compléments sur les fonctions trigonométriques

1) Limites

PROPRIÉTÉ

Les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limites en $+\infty$ ou en $-\infty$.

DÉMONSTRATION

• Montrons que les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite infinie :

$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc si ces fonctions admettent une limite l , alors $-1 \leq l \leq 1$.
Donc $l \neq -\infty$ et $l \neq +\infty$.

• Montrons par l'absurde que les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite finie :

Supposons que la fonction sinus admette, quand x tend vers $+\infty$, une limite finie notée l , compris entre -1 et 1 (d'après ci-dessus).

Alors pour tout intervalle ouvert I contenant l , il existe un réel M tel que $\forall x \geq M, \sin x \in I$.

Prenons $I =]l - 0,1; l + 0,1[$. Alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \geq M, l - 0,1 < \sin x < l + 0,1$.

Or l'intervalle $[M; +\infty[$ contient une infinité de réels sous la forme $\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) dont le sinus vaut 1 et une infinité de réels sous la forme $-\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{N}$) dont le sinus vaut -1 . Ainsi, l'intervalle I devrait contenir à la fois 1 et -1 , ce qui est impossible car la longueur de l'intervalle est de $l + 0,1 - (l - 0,1) = 0,2$.

Donc la fonction sinus n'a pas de limite finie.

(idem pour la fonction cosinus)

REMARQUE

En revanche, une fonction « contenant » un sinus ou un cosinus peut admettre une limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.

EXEMPLE

$f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (théorème des gendarmes).

2) Dérivée de $\cos u$ et $\sin u$

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Alors les fonctions $\cos u$ et $\sin u$ sont dérivables sur I et on a $(\cos u)' = -u' \sin u$ et $(\sin u)' = u' \cos u$.

DÉMONSTRATION

La démonstration est immédiate à partir de la dérivée de deux fonctions composées vue précédemment.

EXEMPLE

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(x^2 + 1)$ et $g(x) = \frac{\cos(1 + e^x)}{e^x}$.

Déterminer pour tout réel x , $f'(x)$ et $g'(x)$.

3) Résolution d'équations et d'inéquations

PROPRIÉTÉ

admise

Soient a et x deux nombres réels.

- $\cos(x) = \cos(a) \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin(x) = \sin(a) \iff x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLES

- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\cos(x) = -\frac{1}{2}$.
- Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$, puis dans $[0 ; 3\pi]$, l'équation : $\sqrt{2} \sin(x) + 3 = 2$.

EXERCICE

Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ puis dans $]0 ; 2\pi]$ l'inéquation : $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.