Terminale Spé Maths – Chapitre A-06

FONCTION LN

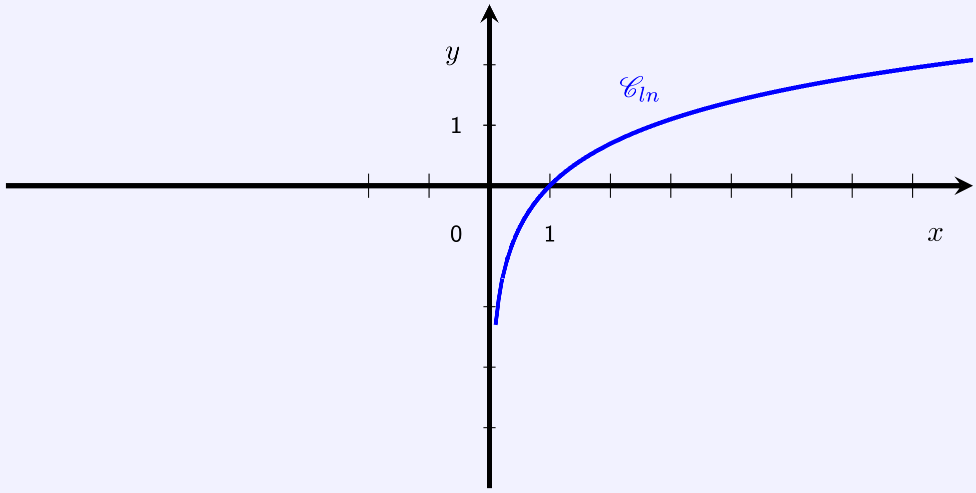


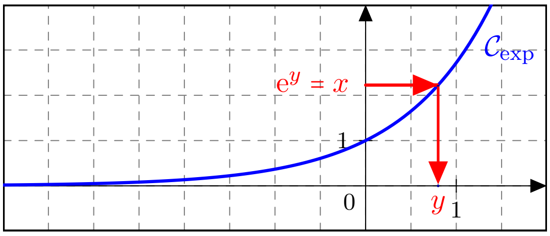
Table des matières

I La fonction logarithme népérien

1) Théorème et définition

THÉORÈME

Pour tout réel $x > 0$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$.



DÉMONSTRATION

- La fonction exponentielle est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Donc d'après le corollaire du TVI, pour tout $x \in]0;+\infty[$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$.

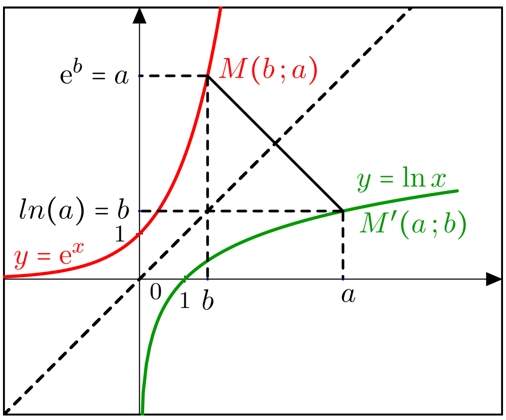
DÉFINITION

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui à tout réel $x > 0$ associe l'unique réel dont l'exponentielle est x.
On dit que la fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exp sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Conséquences immédiates

PROPRIÉTÉS admises

- $\forall a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$. En particulier, $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln x} = x$.
- Les fonctions exp et ln étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



3) La relation fonctionnelle

a La relation

PROPRIÉTÉ

Soient x et y deux réels strictement positifs. Alors $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}\forall x, y \in]0\,;+\infty[,\ \ln(xy) &= \ln(e^{\ln x} \times e^{\ln y}) && \text{d'après la propriété précédente.}\\ &= \ln\left(e^{\ln x + \ln y}\right) && \text{d'après la relation fonctionnelle de la fonction exp.}\\ &= \ln(x) + \ln(y) && \text{d'après la propriété précédente.}\end{aligned}$$

REMARQUE

Si $x < 0$ et $y < 0$, alors $\ln(xy)$ existe, mais $\ln x$ et $\ln y$ n'existent pas : on a alors $\ln(xy) = \ln(-x) + \ln(-y)$.

EXEMPLE

$\ln 12 = \ln(3 \times 2 \times 2) = \ln 3 + 2\ln 2$.

b Conséquences

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
2. $\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$.
3. Pour tous nombres strictement positifs a_1, a_2, ..., a_n : $\ln(a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_n$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln a^n = n \ln a$.
5. $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$.

DÉMONSTRATION

1. $\ln a = \ln\left(\dfrac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) + \ln b$, d'où $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
2. En prenant $a = 1$, on a alors $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = -\ln b$.
3. Démonstration par récurrence (exercice à faire à la maison).
4. Pour $n \geqslant 2$, cela résulte de la proposition précédente en posant $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$.
   Pour $n = 1$ et $n = 0$, cela résulte de $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.
   Pour $n < 0$, $\ln a^n = \ln\left(\dfrac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n\ln a)) = n\ln a$ (car $-n > 0$).
5. $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ donc $\ln a = \ln\sqrt{a} + \ln\sqrt{a} = 2\ln\sqrt{a}$ d'où $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$.

EXEMPLE

Simplifier $A = \ln(4^{-3}) + 5\ln 2$ et $B = \ln\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$. (*Correction :* $A = -\ln 2$ et $B = \dfrac{1}{2}\ln 5$)

II Étude de la fonction logarithme népérien

1) Dérivée

PROPRIÉTÉ

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^{\ln x}$.
f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, de dérivée $f'(x) = \ln' x \times e^{\ln x} = x\ln' x$.
Or $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f(x) = x$, donc $f'(x) = 1$ sur $]0\,;+\infty[$.
Donc $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $x\ln' x = 1$ d'où $\ln' x = \dfrac{1}{x}$.

2) Sens de variation et signe

PROPRIÉTÉ

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

DÉMONSTRATION

$\forall x \in]0;+\infty[$, $\ln' x = \dfrac{1}{x} > 0$ donc ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

PROPRIÉTÉ

La fonction ln est strictement négative sur $]0;1[$, nulle en 1, et strictement positive sur $]1;+\infty[$.

DÉMONSTRATION

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\ln 1 = 0$ d'où le résultat.

3) Résolution d'équations et d'inéquations

PROPRIÉTÉ admise

conséquence directe de la stricte croissance de $\ln$ **:**
Pour tous nombres a et b strictement positifs :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \qquad \text{et} \qquad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

EXEMPLES

- Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $\ln x = -5$.
- Résoudre l'inéquation $\ln(1+x) \leqslant 100$ après avoir précisé sur quel intervalle cette inéquation a un sens.
- De même avec l'inéquation $\ln(x^2 - 4) \leqslant \ln x$.
- De même avec l'équation $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$.

4) Comportement asymptotique

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

DÉMONSTRATION

- **Limite en** $+\infty$ **:**

Soit $I =]A;+\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.
La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc si $x > e^A$, alors $\ln x > A$: pour x assez grand, $\ln x \in I$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

- **Limite en** 0 **:**

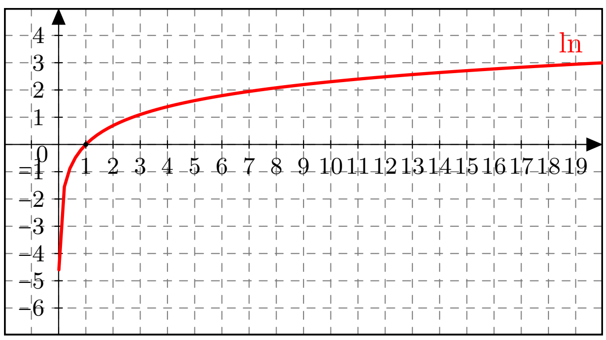
$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, donc par limite de fonctions composées, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln\frac{1}{x} = +\infty$.
Or $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

5) Résumé

Tableau de variation détaillé :

x	0		1		e		$+\infty$
$(\ln)'(x)$	||			$+$			
$\ln$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe représentative :



6) Convexité

PROPRIÉTÉ

La fonction ln est concave sur $]0\,;+\infty[$.

DÉMONSTRATION

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)$.
f est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, et donc $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.
Ainsi, pour tout réel $x>0$, $f''(x)<0$, donc f est concave sur $]0\,;+\infty[$.

III Compléments

1) Des limites importantes

PROPRIÉTÉ

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x=0$

DÉMONSTRATION

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{(1+x)-1}$ (car $\ln 1=0$).
On reconnaît la limite quand x tend vers 0 du taux d'accroissement de la fonction ln entre 1 et $1+x$.
Or la fonction ln est dérivable en 1 donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln'(1)=\frac{1}{1}=1$.

- $\forall x>0$, $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^{\ln x}}$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc par composition, }\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\ln(x)}}{\ln x}=+\infty\text{ et donc par inverse, }\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\mathrm{e}^{\ln(x)}}=0$$

soit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.

- $\forall x>0$, $x\ln x=\mathrm{e}^{\ln x}\ln x$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to-\infty}x\,\mathrm{e}^x=0\end{array}\right\}\text{ donc par composition, }\lim_{x\to 0}\ln x\,\mathrm{e}^{\ln x}=0\text{ soit }\lim_{x\to 0}x\ln x=0.$$

EXEMPLES

- Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\ln x-x)$. (*Factoriser par x*)
- Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\ln x\right)$. ($\forall x>0$, $\displaystyle\frac{x}{x^2+1}\ln x=\frac{x^2}{x^2+1}\,\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\,\frac{\ln x}{x}$).

EXERCICE

Exercice pour retrouver le résultat de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ **:**

1. Démontrer que pour tout $x > 1$, $\ln x < \sqrt{x}$ *(Étude de fonction).*
2. En déduire un encadrement de $\dfrac{\ln x}{x}$ sur $]1\,;+\infty[$ puis conclure.

On peut généraliser, en l'admettant, les deux dernières limites, pour toute puissance de x :

PROPRIÉTÉ admise

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^n \ln x = 0$

2) Dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

Alors la fonction f définie par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

DÉMONSTRATION

La démonstration est immédiate à l'aide de la dérivée de $x \mapsto f(u(x))$:

$\forall x \in I,\ f'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

3) Exercices de synthèse

- Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{3x+5}{x-1}\right)$.
- Étudier la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2$.