

Terminale Spé Maths – Chapitre A-06

FONCTION LN

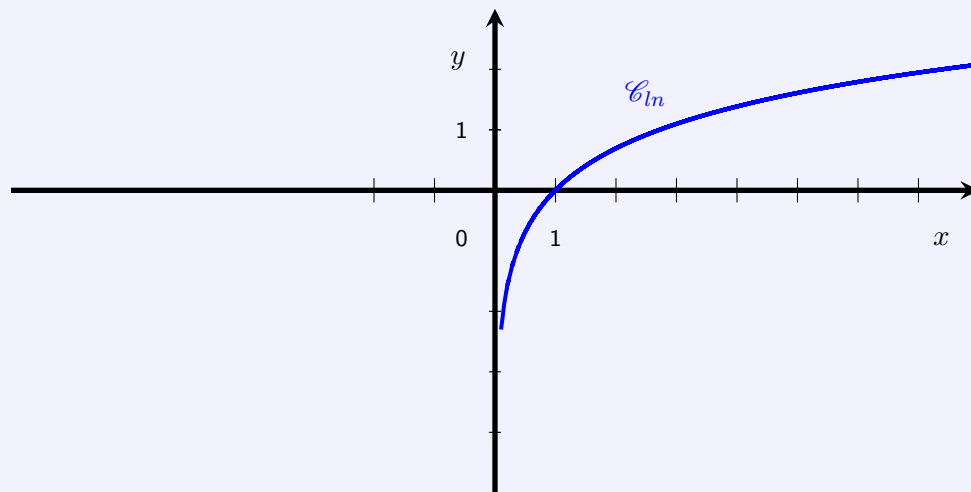


Table des matières

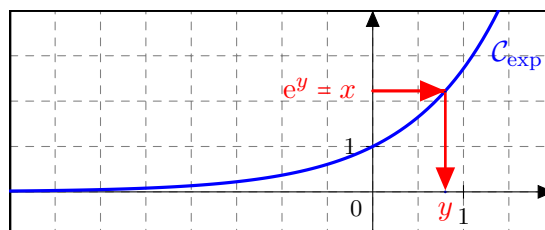
I	La fonction logarithme népérien	2
1)	Théorème et définition	2
2)	Conséquences immédiates	2
3)	La relation fonctionnelle	3
II	Étude de la fonction logarithme népérien	4
1)	Dérivée	4
2)	Sens de variation et signe	4
3)	Résolution d'équations et d'inéquations	5
4)	Comportement asymptotique	5
5)	Résumé	5
6)	Convexité	6
III	Compléments	6
1)	Des limites importantes	6
2)	Dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$	7
3)	Exercices de synthèse	7

I La fonction logarithme népérien

1) Théorème et définition

THÉORÈME

Pour tout réel $x > 0$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$.



DÉMONSTRATION

- La fonction exponentielle est dérivable donc continue sur \mathbb{R} .
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Donc d'après le corollaire du TVI, pour tout $x \in]0; +\infty[$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$.

DÉFINITION

La fonction logarithme népérien, notée \ln , est la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* qui à tout réel $x > 0$ associe l'unique réel dont l'exponentielle est x .

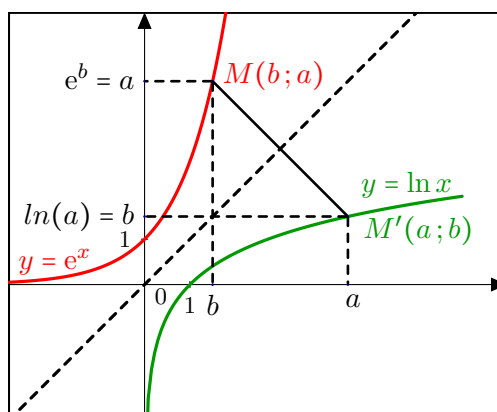
On dit que la fonction \ln est la fonction réciproque de la fonction \exp sur \mathbb{R}_+^* .

2) Conséquences immédiates

PROPRIÉTÉS

admises

- $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$. En particulier, $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^x = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x$.
- Les fonctions \exp et \ln étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



3) La relation fonctionnelle

a La relation

PROPRIÉTÉ

Soient x et y deux réels strictement positifs. Alors $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

DÉMONSTRATION

Soient x et y deux réels strictement positifs. Posons $a = \ln x$ et $b = \ln y$. Alors $x = e^a$ et $y = e^b$.
D'après la relation fonctionnelle de \exp , on a donc : $e^{a+b} = e^a \times e^b$, donc $e^{a+b} = xy$, donc $a + b = \ln(xy)$,
c'est-à-dire $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

REMARQUE

Si $x < 0$ et $y < 0$, alors $\ln(xy)$ existe, mais $\ln x$ et $\ln y$ n'existent pas : on a alors $\ln(xy) = \ln(-x) + \ln(-y)$.

EXEMPLE

$$\ln 12 = \ln(3 \times 2 \times 2) = \ln 3 + 2 \ln 2.$$

b Conséquences

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
- $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.
- Pour tous nombres strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_n : $\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \ln a^n = n \ln a$.
- $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

DÉMONSTRATION

- $\ln a = \ln \left(\frac{a}{b} \times b \right) = \ln \left(\frac{a}{b} \right) + \ln b$, d'où $\ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln a - \ln b$.
- En prenant $a = 1$, on a alors $\ln \left(\frac{1}{b} \right) = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = -\ln b$.
- Démonstration par récurrence (exercice à faire à la maison).
- Pour $n \geq 2$, cela résulte de la proposition précédente en posant $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$.
Pour $n = 1$ et $n = 0$, cela résulte de $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.
Pour $n < 0$, $\ln a^n = \ln \left(\frac{1}{a^{-n}} \right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n \ln a) = n \ln a$ (car $-n > 0$).
- $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ donc $\ln a = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a} = 2 \ln \sqrt{a}$ d'où $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

EXEMPLE

Simplifier $A = \ln(4^{-3}) + 5 \ln 2$ et $B = \ln \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{5}{3} \right)$. (Correction : $A = -\ln 2$ et $B = \frac{1}{2} \ln 5$)

II Étude de la fonction logarithme népérien**1) Dérivée****PROPRIÉTÉ**

La fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\forall x > 0, \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

On admet que la fonction \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$.
 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{\ln x}$.
 f est dérivable sur $]0; +\infty[$, de dérivée $f'(x) = \ln' x \times e^{\ln x} = x \ln' x$.
 Or $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = x$, donc $f'(x) = 1$ sur $]0; +\infty[$.
 Donc $\forall x \in]0; +\infty[, x \ln' x = 1$ d'où $\ln' x = \frac{1}{x}$.

2) Sens de variation et signe**PROPRIÉTÉ**

La fonction \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

DÉMONSTRATION

$\forall x \in]0; +\infty[, \ln' x = \frac{1}{x} > 0$ donc \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

PROPRIÉTÉ

La fonction \ln est strictement négative sur $]0; 1[$, nulle en 1, et strictement positive sur $]1; +\infty[$.

DÉMONSTRATION

\ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et $\ln 1 = 0$ d'où le résultat.

3) Résolution d'équations et d'inéquations

PROPRIÉTÉ

admise

conséquence directe de la stricte monotonie de \ln :

Pour tous nombres a et b strictement positifs :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \quad \text{et} \quad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

EXEMPLES

- Résoudre dans \mathbb{R}_+ l'équation $\ln x = -5$.
- Résoudre l'inéquation $\ln(1+x) \leq 100$ après avoir précisé sur quel intervalle cette inéquation a un sens.
- De même avec l'inéquation $\ln(x^2 - 4) \leq \ln x$.
- De même avec l'équation $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$.

4) Comportement asymptotique

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

DÉMONSTRATION

- **Limite en $+\infty$:**

Soit $I =]A; +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

La fonction \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* donc si $x > e^A$, alors $\ln x > A$: pour x assez grand, $\ln x \in I$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

- **Limite en 0 :**

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$, donc par limite de fonctions composées, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln \frac{1}{x} = +\infty$.

Or $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$.

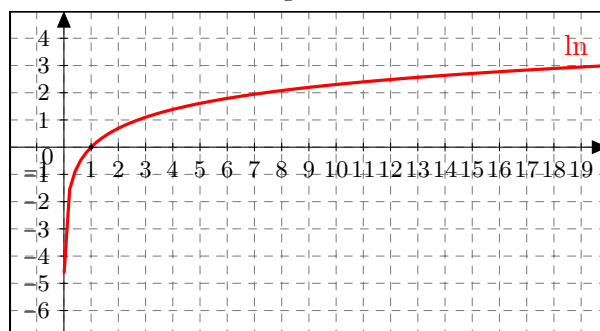
5) Résumé

Tableau de variation détaillé :

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln)'(x)$		+		
\ln				$+\infty$

$-\infty \quad \nearrow \quad 0 \quad \nearrow \quad 1 \quad \nearrow \quad +\infty$

Courbe représentative :



6) Convexité

PROPRIÉTÉ

La fonction \ln est concave sur $]0; +\infty[$.

DÉMONSTRATION

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, et donc $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $f''(x) < 0$, donc f est concave sur $]0; +\infty[$.

III Compléments

1) Des limites importantes

PROPRIÉTÉ

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

DÉMONSTRATION

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{(1+x) - 1} \quad (\text{car } \ln 1 = 0).$$

On reconnaît la limite quand x tend vers 0 du taux d'accroissement de la fonction \ln entre 1 et $1+x$.

Or la fonction \ln est dérivable en 1 donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

$$\bullet \forall x > 0, \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln x}{e^{\ln x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

donc par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln(x)}}{\ln x} = +\infty$ et donc par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^{\ln(x)}} = 0$

$$\text{soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

$$\bullet \forall x > 0, x \ln x = e^{\ln x} \ln x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

donc par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x e^{\ln x} = 0$ soit $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

EXEMPLES

• Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x$. (Factoriser par x)

• Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} \ln x$. ($\forall x > 0$, $\frac{x}{x^2+1} \ln x = \frac{x^2}{x^2+1} \frac{\ln x}{x} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \frac{\ln x}{x}$).

EXERCICE

Exercice pour retrouver le résultat de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$:

- Démontrer que pour tout $x > 1$, $\ln x < \sqrt{x}$ (*Étude de fonction*).
- En déduire un encadrement de $\frac{\ln x}{x}$ sur $]1; +\infty[$ puis conclure.

On peut généraliser, en l'admettant, les deux dernières limites, pour toute puissance de x :

PROPRIÉTÉ

admise

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$$

2) Dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I .

Alors la fonction f définie par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

DÉMONSTRATION

La démonstration est immédiate à l'aide de la dérivée de $x \mapsto f(u(x))$:

$$\forall x \in I, f'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

3) Exercices de synthèse

- Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{3x+5}{x-1}\right)$.
- Étudier la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2$.