

Terminale S – Chapitre A-05

CONTINUITÉ ET CONVEXITÉ

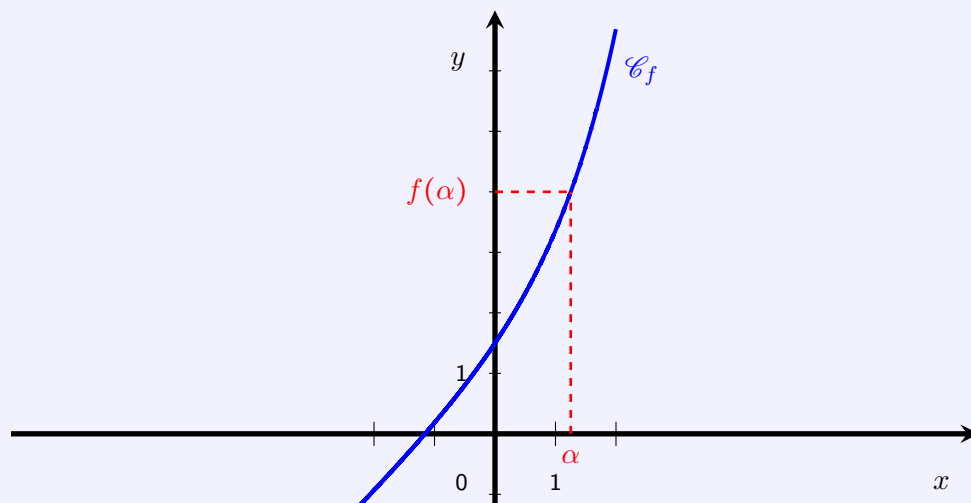


Table des matières

I	Continuité d'une fonction	2
1)	Définition	2
2)	Propriété	3
II	Application aux suites	3
1)	Image d'une suite convergente par une fonction continue	3
2)	Théorème du point fixe	4
III	Le Théorème des Valeurs Intermédiaires	5
1)	Le théorème	5
2)	Le corollaire	5
IV	Convexité	6
1)	Fonctions convexes, fonctions concaves	6
2)	Point d'inflexion	7
3)	Caractérisations de la convexité	7
4)	Convexité et tangentes	8
5)	Point d'inflexion et dérivée seconde	8
6)	Convexité et inégalités	9

I Continuité d'une fonction

1) Définition

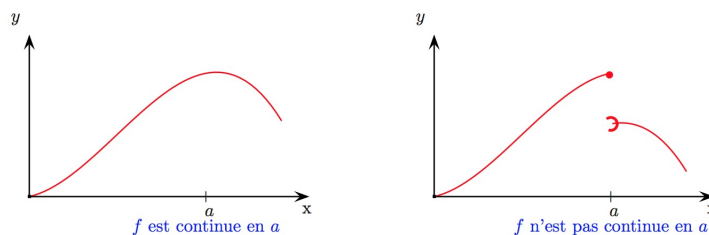
DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I .

- On dit que f est continue en a si et seulement si f a une limite finie en a telle que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$

- On dit que f est continue sur l'intervalle I si et seulement si f est continue en tout réel de I .



REMARQUES

- Les fonctions usuelles sont continues sur les intervalles où elles sont définies. (admis)
- Dans un tableau de variation, on admet que les flèches obliques traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** de la fonction sur l'intervalle considéré.

EXEMPLE

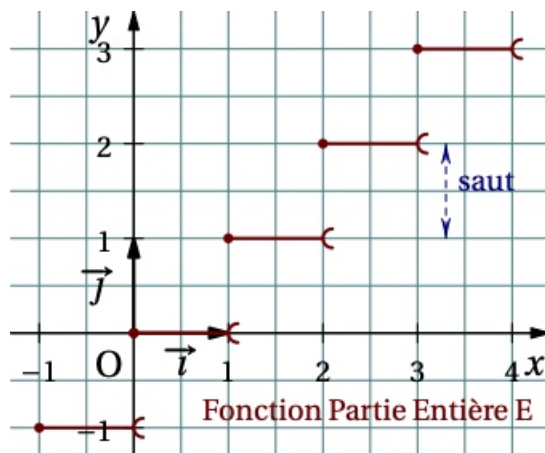
Un exemple connu d'une fonction discontinue : la fonction *partie entière* :

Il s'agit de la fonction E définie sur \mathbb{R} tel que $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x .

$$E(1,4) = 1; E(5,678) = 5; E(12) = 12; E(-3,6) = -4; E(-5) = -5 \text{ etc.}$$

Ainsi, pour tout réel x , on a : $x - 1 < E(x) \leq x$.

La fonction E est donc discontinue en chaque point d'abscisse entière. En ces points, la courbe présente des « sauts ».



2) Propriété

PROPRIÉTÉ

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

DÉMONSTRATION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , et soit a un réel de I .

f est dérivable en a , donc $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est un réel. Notons ℓ ce réel.

Soit g la fonction définie sur $I - \{a\}$ par $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

On a donc pour tout réel x de I , $f(x) = (x - a)g(x) + f(a)$.

Étudions $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$:

$\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$ donc par produit de limites, $\lim_{x \rightarrow a} (x - a)g(x) = 0$, et par somme,

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, donc f est continue en a .

Or ceci est valable pour tout réel a de I , donc f est bien continue sur I .

REMARQUE

Important : la réciproque de cette propriété est fausse ! (Exemple : la fonction $x \mapsto |x|$)

EXEMPLES

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Corrigé : f est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc continue sur cet intervalle.

Il reste à étudier la continuité de f en zéro :

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$ donc f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $[0; +\infty[$.

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue sur \mathbb{R} .

Corrigé : f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sur $] - \infty; 0[$ donc f est continue sur ces intervalles.

Il reste à étudier la continuité de f en zéro :

Or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} |x| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -x = 0$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} |x| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0$ et $|0| = 0$ donc f est continue en 0.

Donc f est continue sur \mathbb{R} .

II Application aux suites

1) Image d'une suite convergente par une fonction continue

PROPRIÉTÉ

admise

Si f est une fonction **continue** sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I **convergeant** vers un réel ℓ de I .

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 0,4^n + 3$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. f est continue sur \mathbb{R} , ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(3) = 9$.

REMARQUE

La réciproque est fautive. La suite $(f(u_n))$ peut converger tandis que la suite (u_n) diverge.

2) Théorème du point fixe**THÉORÈME**

Soit f une fonction **continue sur un intervalle I dans lui-même** et soit (u_n) une suite définie par un réel u_0 de I et la relation de récurrence, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite (u_n) **converge** vers un réel ℓ de I , alors ce réel ℓ est **solution** de l'équation $f(x) = x$.

DÉMONSTRATION

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$.

Or d'après la propriété précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Donc $f(\ell) = \ell$.

REMARQUE

Attention, l'équation $f(x) = x$ peut admettre plusieurs solutions. ℓ est l'une d'entre elles.

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,5u_n + 4$.

On admet que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ . Déterminer alors la valeur de ℓ .

D'après le théorème précédent, puisque la fonction $x \mapsto 0,5x + 4$ est continue sur \mathbb{R} et que la suite (u_n) , définie par $u_0 = 4 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, converge vers ℓ , alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Or $f(x) = x \iff 0,5x + 4 = x \iff 0,5x = 4 \iff x = 8$.

Cette équation admettant une unique solution $x = 8$, alors on a $\ell = 8$.

La suite (u_n) converge donc vers 8.

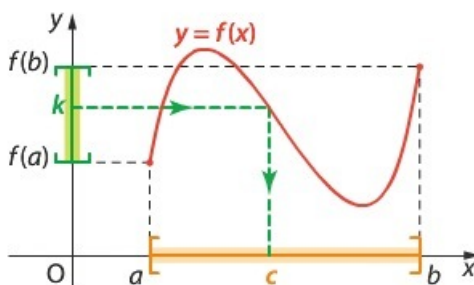
III Le Théorème des Valeurs Intermédiaires

1) Le théorème

THÉORÈME

admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, avec a et b des réels.
 Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$. Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a; b]$.



EXEMPLES

- Montrer que l'équation $x^5 + 2x - 1 = 0$ a au moins une solution dans \mathbb{R} .

Correction :

Soit $f : x \mapsto x^5 + 2x - 1$.

f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R} , et donc continue sur \mathbb{R} .

Or $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ et 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$, et donc dans \mathbb{R} .

- Montrer que l'équation $\cos x = x$ a au moins une solution dans \mathbb{R} .

Correction :

Soit $f : x \mapsto \cos x - x$.

f est dérivable sur \mathbb{R} donc continue sur \mathbb{R} .

Or $f(0) = \cos 0 = 1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$, et 0 est compris entre $f(0)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et donc dans \mathbb{R} .

2) Le corollaire

COROLLAIRE

admis

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I .
 Soient a et b deux réels de I tels que $a < b$.
 Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il **existe un unique** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
 Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans l'intervalle $[a; b]$.

EXEMPLE

1. Montrer que l'équation $\cos x = \sqrt{2}x$ admet exactement une solution dans \mathbb{R} .
2. Quel est le nombre de solutions réelles de l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$?

Correction :

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos x - \sqrt{2}x$.

- $\forall x \in \mathbb{R}, -1 - \sqrt{2}x \leq f(x) \leq 1 - \sqrt{2}x$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -1 - \sqrt{2}x = +\infty \text{ donc d'après le théorème de comparaison, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \sqrt{2}x = -\infty \text{ donc d'après le théorème de comparaison, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin x - \sqrt{2}$.

Or $\forall x \in \mathbb{R}, -\sin x \leq 1$, donc $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

f est dérivable donc continue sur \mathbb{R} et $0 \in] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$ donc d'après le corollaire

du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans \mathbb{R} , c'est-à-dire que l'équation $\cos x = \sqrt{2}x$ admet une unique solution dans \mathbb{R} .

2. Faire une étude complète de $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 6$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$	$-\infty$	6	-26	$+\infty$

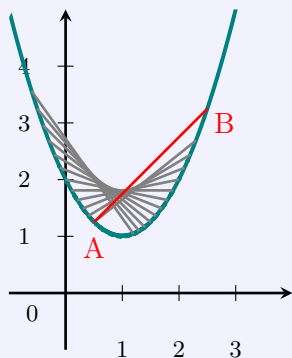
IV Convexité

1) Fonctions convexes, fonctions concaves

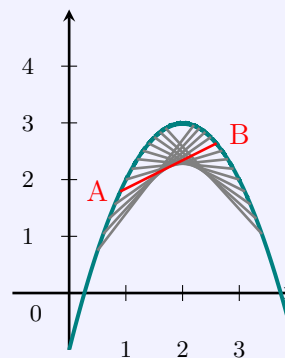
DÉFINITION

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.

- On dit que f est **convexe** sur I si pour tous points distincts A et B de C , la courbe C est située **en-dessous** du segment $[AB]$.



- On dit que f est **concave** sur I si pour tous points distincts A et B de C , la courbe C est située **au-dessus** du segment $[AB]$.

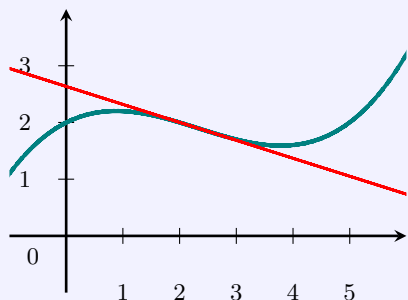


EXEMPLES

Soient f , g et h les fonctions définies respectivement sur \mathbb{R} , \mathbb{R} et $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$ et $h(x) = \sqrt{x}$. Tracer leurs courbes et conjecturer la convexité des trois fonctions.

2) Point d'inflexion

DÉFINITION



Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère du plan.
Soit a un réel de I .

Dire que le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de C signifie qu'au point A , la courbe C traverse la tangente en a .

Remarque :

En l'abscisse a d'un point d'inflexion, la fonction f change de convexité.

3) Caractérisations de la convexité

a Dérivée seconde d'une fonction

DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Dire que f est deux fois dérivable sur I signifie que f' est dérivable sur I .

La dérivée de f' , notée f'' , est appelée **dérivée seconde** de f .

EXEMPLE

$f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = 2x$.

La fonction f' est dérivable également sur \mathbb{R} . Donc f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 2$.

b Propriété

PROPRIÉTÉ

admise

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est **convexe** sur I
- f' est **croissante** sur I .
- f'' est **positive** sur I .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- f est **concave** sur I
- f' est **décroissante** sur I .
- f'' est **négative** sur I .

EXEMPLE

Déterminer la convexité de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - 3x^2 + 5$

4) Convexité et tangentes

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

- Si f est convexe sur I , alors C est située au-dessus de ses tangentes sur I .
- Si f est concave sur I , alors C est située en-dessous de ses tangentes sur I .

DÉMONSTRATION

Soit f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I , et soit a un réel de I .

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est donc $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Soit d la fonction définie sur I par $d(x) = f(x) - (f'(a)(x - a) + f(a))$.

d est dérivable sur I et pour tout réel x de I , on a $d'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Or f est convexe sur I , donc f' est croissante sur I .

Donc pour tout $x \leq a$, $f'(x) \leq f'(a)$, d'où $d'(x) \leq 0$.

Et de même, pour tout $x \geq a$, $f'(x) \geq f'(a)$, d'où $d'(x) \geq 0$.

Donc d admet un minimum en a et ce minimum vaut $d(a) = f(a) - (f'(a)(a - a) + f(a)) = f(a) - f(a) = 0$.

Donc d est positive sur I , c'est-à-dire que pour tout réel de I , $f(x) > f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ainsi, la courbe de f est bien située au-dessus de sa tangente en a , et donc de toutes ses tangentes sur I .

On démontre de même que si f est concave sur I , alors C est en-dessous de ses tangentes sur I .

5) Point d'inflexion et dérivée seconde

PROPRIÉTÉ

admise

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.

Soit a un réel de I .

$A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $C \iff f''$ s'annule en a en changeant de signe.

EXEMPLE

$f : x \mapsto x^3$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.

On dresse (immédiat) le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		-	+

Ainsi, le point $A(0; 0)$ est un point d'inflexion de C .

6) Convexité et inégalités

POINT MÉTHODE

Pour établir une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction f , on peut étudier la position relative de sa courbe C_f avec une de ses tangentes.

EXEMPLE

On cherche à démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

Pour cela, on pose la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x$ et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrer que f est convexe sur \mathbb{R} .
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
3. En déduire que pour tout réel x , on a $e^x \geq x + 1$.

Correction :

1. f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , on a $f'(x) = e^x$ et $f''(x) = e^x$.
Or pour tout réel x , $e^x > 0$, soit $f''(x) > 0$ donc f est convexe sur \mathbb{R} .
2. $T : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, avec $f'(0) = e^0 = 1$ et $f(0) = e^0 = 1$, soit $T : y = 1 \times (x - 0) + 1$, soit $T : y = x + 1$.
3. La fonction f étant convexe sur \mathbb{R} , sa courbe C_f est située au-dessus de ses tangentes, et donc en particulier au-dessus de sa tangente T . Donc pour tout réel x , on a bien $e^x \geq x + 1$.