Terminale Spé Maths – Chapitre A-04

COMPLÉMENTS SUR LA DÉRIVATION

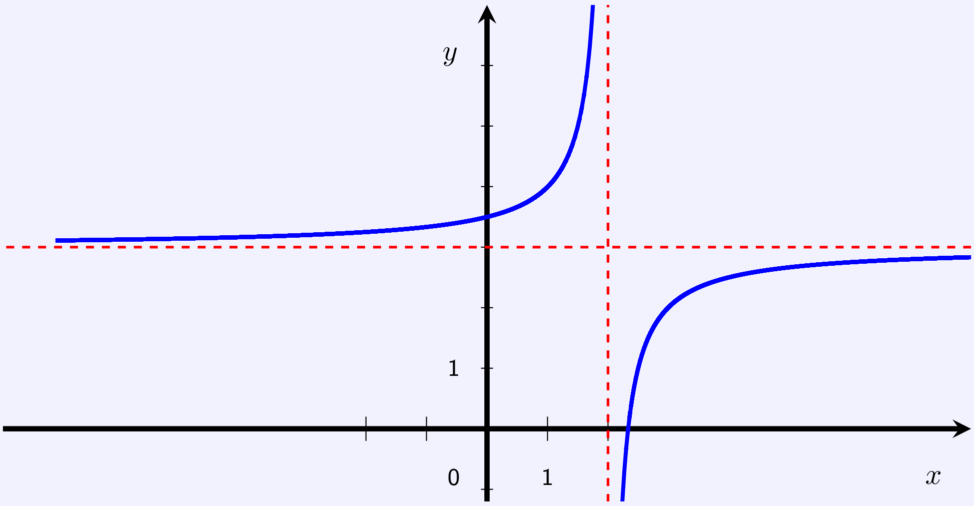

Table des matières

1) Dérivée d'une fonction composée

THÉORÈME — admis

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J tel que, pour tout réel x de I, $g(x)$ appartient à J.
Alors la fonction $f \circ g$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto g'(x) \times f'(g(x))$.

2) Fonctions du type $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

THÉORÈME

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I.
Alors $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

DÉMONSTRATION

Immédiate à l'aide de la propriété de dérivation d'une fonction composée vue en **1)**.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie par $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.
Déterminer l'ensemble de définition de f, sa fonction dérivée f' et en déduire les variations de f.

EXERCICE

Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. A l'aide du théorème ci-dessous, déterminer l'ensemble de dérivabilité de f et sa dérivée.
3. Démontrer que f n'est pas dérivable en 1 (*Attention, le h doit ici être strictement négatif*).

3) Fonctions du type $x \mapsto (u(x))^n$

THÉORÈME

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction $x \mapsto (u(x))^n$ est :
• dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, de dérivée $x \mapsto nu'(x)u(x)^{n-1}$.
• dérivable en tout réel de I où $u(x) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, de dérivée $x \mapsto nu'(x)u(x)^{n-1}$

DÉMONSTRATION

Immédiate à l'aide de la propriété de dérivation d'une fonction composée vue en **1)**.

EXEMPLES

Déterminer les dérivées des fonctions $f : x \mapsto (x^2+3x-1)^4$ et $g : x \mapsto (x^2+3x-1)^{-4}$.
(*Attention pour g, penser à déterminer les valeurs de x telles que $g(x) \neq 0$ en calculant* $\Delta = 13$.)

4) Fonctions du type $x \mapsto \exp(u(x))$

THÉORÈME

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction $x \mapsto \exp(u(x))$ est dérivable sur I, de dérivée $x \mapsto u'(x) \times \exp(u(x))$.
On le note : $(e^u)' = u'e^u$.

DÉMONSTRATION

Immédiate à l'aide de la propriété de dérivation d'une fonction composée vue en **1)**.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto e^{x^2+\frac{1}{x}}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer la dérivée de f.

REMARQUE

Sens de variation de la fonction e^u **:**
Comme $(e^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$ et que $\mathrm{e}^u > 0$, les dérivées u' et $u'\,\mathrm{e}^u$ ont le même signe.
Ainsi, on peut retenir que si u est dérivable sur un intervalle I, alors les fonctions u et e^u ont le même sens de variations sur I.