Terminale Spé Maths – Chapitre A-02

LIMITES DE SUITES

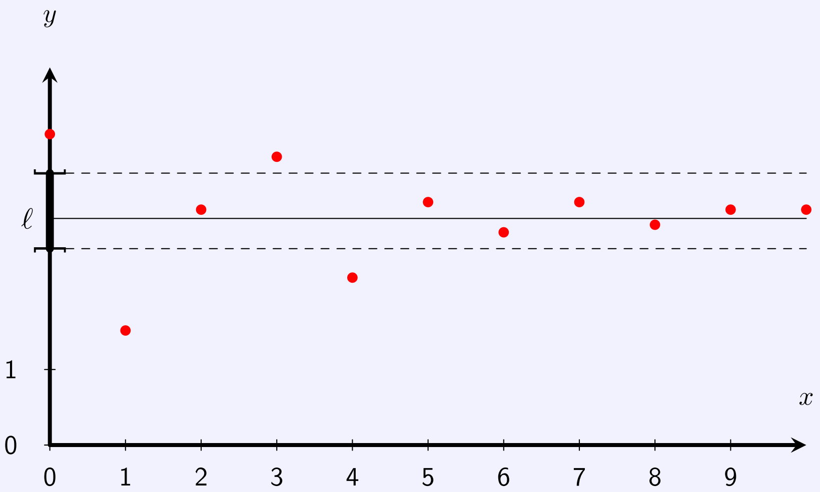


Table des matières

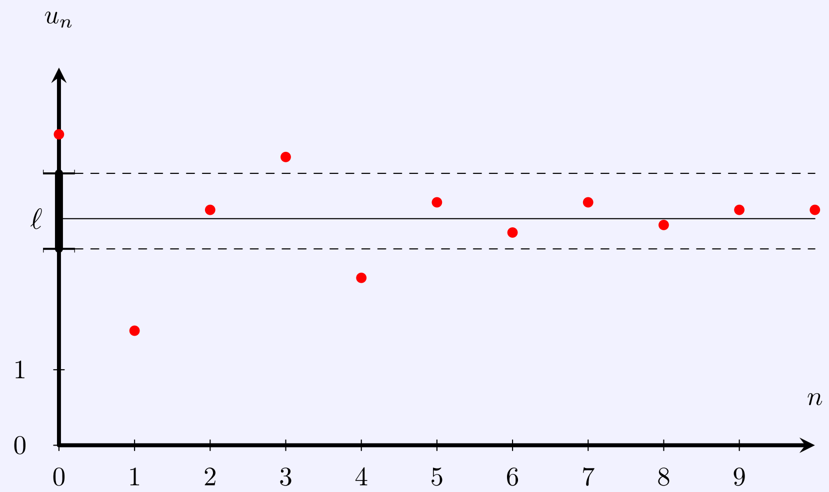
I Limite finie ou infinie d'une suite

1) Limite finie : suite convergente

DÉFINITION

Soit u une suite et l un réel.
On dit que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite u converge vers l et que l est la limite de u, et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.



EXEMPLE

Les suites de référence $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$, $n \mapsto \dfrac{1}{n^3}$, $n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0.

DÉMONSTRATION

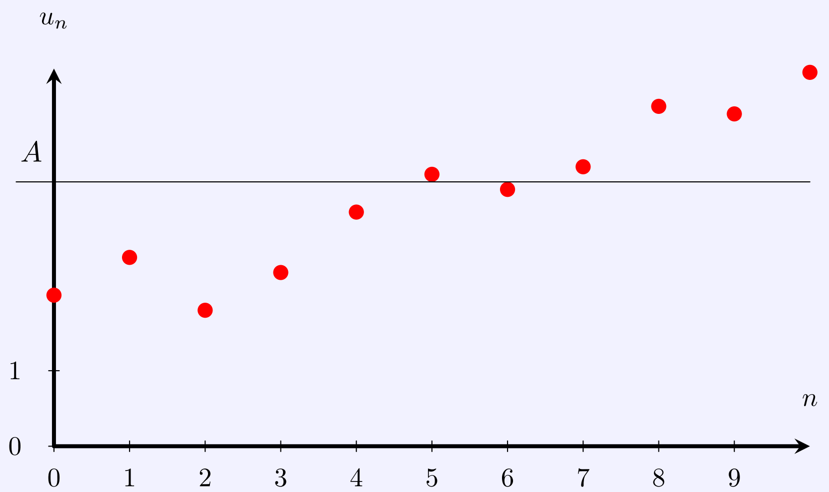
Démonstration pour $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$:
Soit I un intervalle ouvert contenant 0 : il existe alors deux réels $\lambda < 0$ et $\mu > 0$ tel que $I =]\lambda;\mu[$.
I contient 0 donc $\lambda < 0$.
Donc $\lambda < \dfrac{1}{n^2} < \mu \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{n^2} < \mu$ (car $\dfrac{1}{n^2}$ est strictement positif pour tout n)
$\Leftrightarrow n^2 > \dfrac{1}{\mu}$ (car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$)
$\Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$ (car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $0;+\infty[$)
Donc à partir du premier rang strictement supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}$, I contient tous les $\dfrac{1}{n^2}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.

2) Limite infinie

DÉFINITION

Soit u une suite.
On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite u diverge vers $+\infty$ et que $+\infty$ est la limite de u, et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



REMARQUE

On définit de même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ avec un intervalle ouvert de la forme $]-\infty;A[$.

EXEMPLES

Les suites de référence $n \mapsto n$, $n \mapsto n^2$, $n \mapsto n^3$, $n \mapsto \sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

DÉMONSTRATION

Démonstration pour $n \mapsto \sqrt{n}$:
Soit A un réel.
Si $A < 0$, alors on a bien $\sqrt{n} > A$.
Si $A > 0$, alors $\sqrt{n} > A \Leftrightarrow n > A^2$ (car la fonction carrée est strictement croissante sur $[0;+\infty[$)
Donc à partir du premier rang strictement supérieur à A^2, I contient tous les $\sqrt{n}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

REMARQUE

Certaines suites n'admettent pas de limite. On dit alors que la suite u diverge ou est divergente.
Exemple : la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$.

II Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

Si u a pour limite	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
Si v a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $u+v$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	? ? ? ? ?

REMARQUE

les rôles de u et v peuvent être échangés.

2) Limite d'un produit

Si u a pour limite	l	$l \neq 0$	∞	0
Si v a pour limite	l'	∞	∞	∞
Alors uv a pour limite	ll'	∞	∞	? ? ? ? ?

REMARQUES

- les rôles de u et v peuvent être échangés.
- On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

3) Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$

Si u a pour limite	l	l	∞	∞
Si v a pour limite	$l' \neq 0$	∞	$l \neq 0$	∞
Alors $\frac{u}{v}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	∞	? ? ? ? ?

REMARQUE

On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

4) Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Si u a pour limite	$l \neq 0$ ou ∞	0
Si v a pour limite	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain rang	0
Alors $\frac{u}{v}$ a pour limite	∞	? ? ? ? ?

REMARQUE

On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

5) Formes indéterminées

Les quatre cases ????? dans les tableaux précédents représentent des cas de formes indéterminées. En effet, on ne peut déterminer la limite de manière générale :

- **Forme indéterminée $+\infty - \infty$:**

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$
$2n+1$	$-n$	$n+1$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
n^2+1	$-n^2$	1	$+\infty$	$-\infty$	1
$n+\frac{1}{n}$	$-n$	$\frac{1}{n}$	$+\infty$	$-\infty$	0

- **Forme indéterminée $\infty \times 0$:**

u_n	v_n	$u_n \times v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$
n^2	$\frac{1}{n}$	n	$+\infty$	0	$+\infty$
n	$-\frac{1}{n^2}$	$-\frac{1}{n}$	$+\infty$	0	0
$5n^3$	$\frac{2}{n^3}$	10	$+\infty$	0	10

- **Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$:**

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \div v_n$
n	$3n$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{3}$
$2n^2$	$-n$	$-2n$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
n	$2n^3$	$\frac{1}{2n^2}$	$+\infty$	$+\infty$	0

- **Forme indéterminée $\frac{0}{0}$:**

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \div v_n$
$\frac{3}{n}$	$\frac{1}{n}$	3	0	0	3
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	n	0	0	$+\infty$

Les cas de formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent.
Pour les mémoriser, on les note « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ », mais **ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction ni apparaitre sur une copie** !

EXERCICE

Soit $u_n = \dfrac{\sqrt{n}-1}{n+1}$ et $v_n = n - \sqrt{n^2+1}$.
Déterminer les limites des suites u et v quand n tend vers $+\infty$.

Correction :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$? (FI $\dfrac{\infty}{\infty}$) ; $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$? (FI $+\infty-\infty$)

• $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \times \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{n}}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{n}} = 1$, donc par produit de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

• $\forall n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{n^2-(n^2+1)}{n+\sqrt{n^2+1}} = \dfrac{-1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

III Limites et comparaison

1) Théorème de comparaison

THÉORÈME

Soit u et v deux suites. Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0,
• $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
• $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

DÉMONSTRATION

• Il s'agit de prouver que tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$, avec A un réel quelconque, contient tous les termes de la suite v à partir d'un certain rang.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc par définition, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Notons p ce rang.
On sait aussi qu'à partir du rang n_0, $u_n \leqslant v_n$. Notons alors N le plus grand des deux entiers n_0 et p.
A partir du rang N, l'intervalle $]A:+\infty[$ contient tous les termes u_n et donc *a fortiori* tous les termes v_n puisque l'inégalité $u_n \leqslant v_n$ est alors vérifiée.
Ceci étant vrai quel que soit le réel A, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

• Démonstration analogue. (*A faire chez soi en exercice*)

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + (-1)^n$.

1. Justifier que la suite n'est pas monotone.
2. Déterminer sa limite quand n tend vers ∞.

Corrigé :

1. Il suffit de calculer les premiers termes : $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 3$, $u_3 = 2$, $u_4 = 5$...
2. $(-1)^n$ est égal à -1 ou 1, selon la parité de n. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \geqslant -1$.
   Donc $n + (-1)^n \geqslant n - 1$, soit $u_n \geqslant n - 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Théorème d'encadrement

THÉORÈME admis

Soit u, v et w trois suites telles que :
- $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang n_0,
- v et w convergent vers la même limite l,

alors la suite u converge et sa limite est l.

EXEMPLE

Étudier la convergence de la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{2+3\cos n}{n}$.

Correction :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$
Donc $-1 \leqslant 2 + 3\cos n \leqslant 5$
Donc avec $n \neq 0$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{5}{n}$. (car $n > 0$)
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$, donc d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

IV Convergence des suites monotones

1) Suite majorée, minorée, bornée

DÉFINITION

- On dit qu'une suite u est **majorée** si il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.
- On dit qu'une suite u est **minorée** si il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.
- On dit qu'une suite est **bornée** si elle est majorée **et** minorée.

REMARQUE

Si une suite u admet un majorant (resp. minorant), alors ce majorant (resp. minorant) n'est pas unique :
- Si u est majorée par un réel M, alors elle est majorée par tout réel supérieur à M.
- Si u est minorée par un réel m, alors elle est minorée par tout réel inférieur à m.

REMARQUE

- Si une suite admet un maximum, alors ce maximum est le plus petit des majorants.
- Si une suite admet un minimum, alors ce minimum est le plus grand des minorants.

EXEMPLES

- $u_n = 3 - \sqrt{n}$. Pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 3$ donc la suite u est majorée par 3 (et donc par n'importe quel réel supérieur ou égal à 3).

- $u_n = \dfrac{1}{n}$. La suite u est bornée car, pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$. (Elle est minorée par 0 - et tout nombre inférieur à 0, et majorée par 1 - et tout nombre supérieur à 1)

2) Différents théorèmes

THÉORÈME — admis

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

REMARQUE

Attention, ce théorème prouve uniquement l'existence d'une limite finie, mais ne permet pas de déterminer la valeur de cette limite !

THÉORÈME

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

DÉMONSTRATION

- Soit u une suite croissante non majorée et A un réel.
u est non majorée, donc il existe un entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
u est croissante, donc $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} > A$.
Donc à partir du rang n_0, l'intervalle $]A;+\infty[$ contient tous les termes u_n, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- *Démonstration analogue.*

EXERCICE

Soit $u_n = 2^n - n$.

1. Montrer que la suite u est croissante.
2. On admet que u est non majorée. Écrire un algorithme permettant de déterminer le rang à partir duquel $u_n > A$, A étant un réel donné.

Correction :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - 2^n + n = 2^n(2-1) - 1 = 2^n - 1 \geqslant 0$ pour $n \geqslant 0$ donc u est croissante.
2. Pour $A = 10$, on obtient $n = 4$. Pour $A = 50$, on obtient $n = 6$. Pour $A = 10^6$, on obtient $n = 20$.

```python
def u(n):
    return 2**n-n

def seuil(A):
    n=0
    while u(n)<A:
        n=n+1
    return n
```

THÉORÈME

- Si une suite u est croissante et admet pour limite l, alors pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant l$.
- Si une suite u est décroissante et admet pour limite l, alors pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant l$.

DÉMONSTRATION

- Soit u une suite croissante et qui converge vers un réel l.

Raisonnement par l'absurde :
Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > l$ et posons $I =]-\infty; u_{n_0}[$.
I est un intervalle ouvert contenant l, donc il contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang n_1 : $\forall n \geqslant n_1$, $u_n < u_{n_0}$
Or u étant croissante, on a $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$: impossible !

- *Démonstration analogue.*

V Limite d'une suite géométrique

Soit u une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$, de raison q non nulle.
Alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
D'après les théorèmes sur les opérations et les limites, pour déterminer le comportement de la suite u à l'infini, il suffit de connaitre celui de la suite v définie par $v_n = q^n$.

THÉORÈME

Soit q un réel.

Si $q \leqslant -1$	:	la suite (q^n) n'a pas de limite.
Si $-1 < q < 1$	:	la suite (q^n) converge vers 0.
Si $q = 1$	:	la suite (q^n) converge vers 1.
Si $q > 1$	:	la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

DÉMONSTRATION

Démonstration dans le cas où $q > 1$, exigible BAC !! : $q > 1$. Posons alors $q = 1 + a$ avec $a > 0$.

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.
Soit P_n : « $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ » :

• **Initialisation :** $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc P_0 est vraie.

• **Hérédité :** Supposons P_n vraie pour un certain n fixé et montrons alors que P_{n+1} est vraie.
Hypothèse de récurrence : P_n : « $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ »
Ce que l'on veut montrer : P_{n+1} : « $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$ »

$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a)$
Or $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ (Hypothèse de récurrence)
Donc $(1+a)^n \times (1+a) \geqslant (1+na)(1+a)$ (car $1 + a > 0$)
Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a + na^2$
Donc $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$ (car $na^2 \geqslant 0$).
Donc P_{n+1} est vraie.

• **Conclusion :** La proposition P_n est vraie au rang 0, de plus elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

b) Retour à la démo :
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n \geqslant 1 + na$ avec $a > 0$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

EXEMPLES

1. Déterminer la limite de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -5(\sqrt{3})^n$.
2. Déterminer la limite de la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -3\left(1-\sqrt{2}\right)^n$.
3. Déterminer la limite de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}$
4. La suite z définie sur $\mathbb{N}$ par $z_n = \dfrac{3^{n+1}}{(-2)^n}$ a-t-elle une limite ?

Correction :

1. $\sqrt{3} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. $1-\sqrt{2} \in]-1;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\sqrt{2})^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

   Or $\dfrac{1}{2} \in]-1;1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \dfrac{3^{n+1}}{(-2)^n} = 3 \times \dfrac{3^n}{(-2)^n} = 3 \times \left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$.

   Or $-\dfrac{3}{2} < -1$ donc $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^n$ n'a pas de limite, donc la suite z non plus.