Terminale Maths Expertes – Chapitre 04

NOMBRES COMPLEXES – Partie 2

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

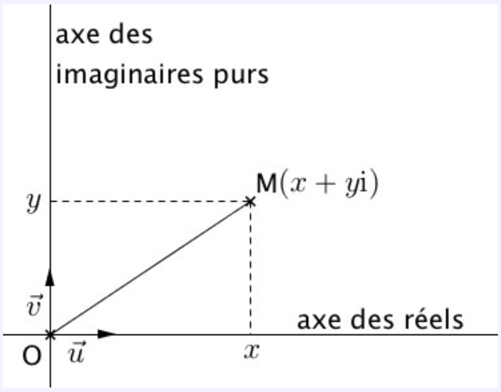
Table des matières

I Représentation géométrique d'un nombre complexe

1) Affixe d'un point dans le plan complexe

DÉFINITION

Le plan est mini d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit $z = x + y\mathrm{i}$ avec x et y deux réels.
On représente z par le point M de coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
(C'est-à-dire $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$)
On dit que $x + y\mathrm{i}$ est l'**affixe** du point M dans le plan complexe, et on note $M(z)$.



REMARQUE

En mathématiques, le mot « affixe » est **féminin** : une affixe.
En français, le mot « affixe », qui à un autre sens, est masculin : un affixe.

PROPRIÉTÉ

Conséquences :
- $M(z)$ appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- $M(z)$ appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.
- Le point $M'(\overline{z})$ est le symétrique du point $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses.

EXEMPLES

1) Placer dans le plan complexe les points $A(2 - \mathrm{i})$ et $B(2\mathrm{i})$.

2) Soit A' le symétrique de A par rapport à l'axe (Oy) et B' le symétrique de B par rapport à l'axe (Ox). Déterminer les affixes de A' et B'.

2) Affixe d'un vecteur

DÉFINITION

Soit $\vec{w}$ un vecteur.
L'affixe de $\vec{w}$ est l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{w}$.
On note : $z_{\vec{w}} = z_{\overrightarrow{OM}} = x + y\mathrm{i}$, si $M(x; y)$ dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et $\vec{w}(z_{\vec{w}})$.

PROPRIÉTÉ

Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe.
Alors $\overrightarrow{MM'}(z'-z)$.

DÉMONSTRATION

Soient $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan complexe avec $z=x+y\mathrm{i}$ et $z'=x'+y'\mathrm{i}$ (x, y, x' et y' des réels).
$M(x;y)$ et $M'(x';y')$ donc $\overrightarrow{MM'}(x'-x;y'-y)$.
Donc $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $x'-x+\mathrm{i}(y'-y)=x'+y'\mathrm{i}-(x+y\mathrm{i})=z'-z$.

PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{w}$ et $\vec{w'}$ deux vecteurs ayant pour affixes respectives z et z'.
- $\vec{w}=\vec{w'}$ si et seulement si $z=z'$.
- $\vec{w}+\vec{w'}$ a pour affixe $z+z'$.
- Pour tout réel k, le vecteur $k\vec{w}$ a pour affixe kz.

PROPRIÉTÉ

Milieu d'un segment :
Soient A et B deux points et I le milieu du segment $[AB]$. Alors $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

DÉMONSTRATION

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors $2\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}$, donc $2(z_I-z_A)=z_B-z_A$, d'où $z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$.

II Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Dans cette partie, on munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) Quelques points d'affixes connus

EXEMPLES

Placer, en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas, les points :
$A\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$ $\quad B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$ $\quad C\left(\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)$.

2) Module d'un nombre complexe

DÉFINITION

Soit $M(z)$ un point dans le plan complexe.
On appelle **module de** z et on note $|z|$ la distance OM.
(Faire une figure)

PROPRIÉTÉ

Soit $z = x + y\text{i}$ un nombre complexe avec x et y des réels.
Alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $z\overline{z} = |z|^2$

DÉMONSTRATION

- $OM^2 = x^2 + y^2$ donc $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $z\overline{z} = (x + y\text{i})(x - y\text{i}) = x^2 - y^2\text{i}^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

PROPRIÉTÉ

Conséquence :
$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

REMARQUE

Si $z \in \mathbb{R}$, alors $z = x + 0\text{i} = x$ donc $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ (valeur absolue de x).

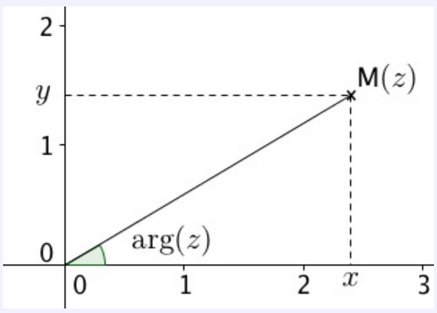
PROPRIÉTÉ

Soit z un nombre complexe.
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|-z| = |z|$

3) Argument d'un nombre complexe non nul

DÉFINITION

Soit $M(z)$ un point du plan complexe, distinct de l'origine O (c'est-à-dire $z \neq 0$).
On appelle **argument** de z et on note $\arg(z)$ toute mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



REMARQUE

Un nombre complexe a une infinité d'arguments, qui diffèrent d'un multiple de 2π.

PROPRIÉTÉ

Soit $z = x + y\mathrm{i}$ un nombre complexe non nul, avec x et y des réels.
Alors $\cos(\arg(z)) = \dfrac{x}{|z|}$ et $\sin(\arg(z)) = \dfrac{y}{|z|}$.

DÉMONSTRATION

Posons $\theta = \arg(z)$.
On a d'après la trigonométrie $\cos\theta = \dfrac{x}{OM}$ et $\sin\theta = \dfrac{y}{OM}$ d'où le résultat.

EXEMPLES

1) Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants : 3 ; -4 ; $2\mathrm{i}$; $-1+\mathrm{i}$; $2-2\mathrm{i}$.

2) Faire une figure et vérifier les réponses du a).

3) Déterminer le module et une valeur approchée à 10^{-2} près d'un argument de $z = -1+2\mathrm{i}$ au moyen de la calculatrice.

PROPRIÉTÉ

Soit z un nombre complexe non nul.
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$

4) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

a Définition

DÉFINITION

Soit z un nombre complexe non nul, r le module de z et θ un argument de z.
Alors $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est la **forme trigonométrique** de z.

b Lien entre la forme algébrique et la forme trigonométrique

Si z a pour forme algébrique $x + y\mathrm{i}$ et pour forme trigonométrique $r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ (avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$), alors :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{r} \ \text{ et } \ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

EXEMPLES

Soit $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, z_2 le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\dfrac{\pi}{4}$, $z_3 = -2(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6})$ et $z_4 = \sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})$.
Donner la forme trigonométrique de z_1, la forme algébrique de z_2 et les formes trigonométriques de z_3 et z_4.

5) Propriétés du module

PROPRIÉTÉ

Soient z et z' deux nombres complexes et n un entier relatif.
- $|zz'| = |z| \times |z'|$.
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
- Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
- $|z^n| = |z|^n$.
- Inégalité triangulaire : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

DÉMONSTRATION

- $|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = zz' \times \overline{z} \times \overline{z'} = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2$.
Or $|zz'|$, $|z$ et $|z'|$ sont des réels positifs donc $|zz'| = |z| \times |z'|$.
- $|1| = \left|z \times \dfrac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z}\right|$, donc $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{|1|}{|z|} = \dfrac{1}{|z|}$
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \left|z \times \dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \left|\dfrac{1}{z'}\right| = |z| \times \dfrac{1}{|z'|} = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- Par récurrence, et si $n < 0$, avec la 2e propriété.
- immédiat.

6) Propriétés pour les arguments

PROPRIÉTÉ — admise

Soit z un complexe non nul.
$\arg(z) = 0 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z} \iff z$ est un réel strictement positif.
$\arg(z) = \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z} \iff z$ est un réel strictement négatif.
$\arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z} \iff z$ est un imaginaire pur avec $\mathrm{Im}(z) > 0$.
$\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z} \iff z$ est un imaginaire pur avec $\mathrm{Im}(z) < 0$.

Ainsi :
z est un réel non nul $\iff \arg(z) = 0 + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$
et z est un imaginaire pur $\iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

7) Formules d'addition et de duplication

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels a et , on a :

1) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

2) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

3) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

4) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

DÉMONSTRATION

Démonstration de $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$:

Dans un repère $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ orthonormé du plan complexe, on considère les points M_a et M_b d'affixes respectives $z_a = \cos a + \mathrm{i}\sin a$ et $z_b = \cos b + \mathrm{i}\sin b$, avec a et b deux réels.
On a alors $|z_a| = \sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a} = \sqrt{1} = 1$ (ou directement par lecture de la forme trigonométrique de z_a, et de même, $|z_b| = 1$.
On a également $\arg(z_a) = a$ et $\arg(z_b) = b$.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OM_a} \cdot \overrightarrow{OM_b}$ de deux façons différentes :

D'une part, $\overrightarrow{OM_a} \cdot \overrightarrow{OM_b} = OM_a \times OM_b \times \cos(\overrightarrow{OM_a}\,,\overrightarrow{OM_b})$.
Or $OM_a = |z_a| = 1$, $OM_b = |z_b| = 1$. De plus :
$(\overrightarrow{OM_a}\,,\overrightarrow{OM_b}) = (\overrightarrow{OM_a}\,,\vec{u}) + (\vec{u}\,,\overrightarrow{OM_b}) = -(\vec{u}\,,\overrightarrow{OM_a}) + (\vec{u}\,,\overrightarrow{OM_b}) = -\arg(z_a) + \arg(z_b) = -a+b = b-a$.
Ainsi, $\overrightarrow{OM_a} \cdot \overrightarrow{OM_b} = 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(a-b)$ (car $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$)

D'autre part, on a $\overrightarrow{OM_a}(\cos a\,;\sin a)$ et $\overrightarrow{OM_b}(\cos b\,;\sin b)$.
Ainsi, le repère étant orthonormé, on a $\overrightarrow{OM_a} \cdot \overrightarrow{OM_b} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Conclusion : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Démonstrations des trois autres formules :

$$\cos(a+b) = \cos(a-(-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) \\
&= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin b \\
&= \sin a \cos b + \sin b \cos a
\end{aligned}$$

$$\sin(a-b) = \sin(a+(-b)) = \sin a \cos(-b) + \sin(-b)\cos a = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x, on a :

- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$.
- $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.
- $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$.

DÉMONSTRATION

Utiliser les formules d'addition.

8) Autres propriétés pour les arguments

PROPRIÉTÉ

Pour tous complexes z et z' non nuls, et pour tout n entier relatif, on a :
$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$ $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
$\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$

DÉMONSTRATION

Posons $z = r(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta'))$ avec $r = |z|$, $r' = |z'|$, θ un argument de z et θ' un argument de z'.
Alors $zz' = rr'(\cos(\theta)\cos(\theta') + \mathrm{i}\cos(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta'))$
$= rr'(\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + \mathrm{i}(\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta'))$
$= rr'(\cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta'))$
Donc $\arg(zz') = \theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$.

$\arg(1) = \arg\left(z \times \dfrac{1}{z}\right) = \arg(z) + \arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$ donc $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = \arg(1) - \arg(z) = 0 - \arg(z) = -\arg(z)$.
$\arg(z) = \arg\left(z' \times \dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z') + \arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)$ donc $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$.

Pour $\arg(z^n)$, on procède par récurrence en utilisant zz'.

9) Interprétation géométrique du module

THÉORÈME

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Alors $AB = |z_B - z_A|$.

DÉMONSTRATION

On sait qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Or $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $z_M - 0 = z_M$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. Donc $z_M = z_B - z_A$.
Ainsi, $|z_M| = |z_B - z_A|$. Or par définition, $|z_M| = OM$ et $OM = AB$, donc $AB = |z_B - z_A|$.

PROPRIÉTÉ

L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
L'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - z_A| = r$, avec r un réel strictement positif, est le cercle de centre A et de rayon r

DÉMONSTRATION

Immédiate car $|z - z_A| = |z - z_B| \Longleftrightarrow AM = BM$ et $|z - z_A| = r \Longleftrightarrow AM = r$

10) Interprétation géométrique de l'argument

THÉORÈME

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, tels que $A \neq B$.
Alors $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$.

DÉMONSTRATION

On sait qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Comme précédemment, $z_M = z_B - z_A$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.
Or $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z_M)$. Donc $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_M) = \arg(z_B - z_A)$.

PROPRIÉTÉ

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, avec $A \neq B$ et $C \neq D$.
Alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

DÉMONSTRATION

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{AB},\vec{u})+(\vec{u},\overrightarrow{CD}) = (\vec{u},\overrightarrow{CD})-(\vec{u},\overrightarrow{AB}) = \arg(z_D-z_C)-\arg(z_B-z_A) = \arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$$

EXERCICES

1) Soient les points A, B et C d'affixes respectives -1, $2\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$. Démontrer que le triangle ABC est isocèle rectangle en A.

2) Soient les points A et B d'affixes respectives $2\mathrm{i}$ et -3. A tout point M d'affixe z on associe le complexe $Z = \dfrac{z-2\mathrm{i}}{z+3}$.

- **a)** Que représentent graphiquement $|Z|$ et $\arg(Z)$?
- **b)** Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.
- **c)** Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que Z soit un imaginaire pur.

III La notation exponentielle

1) La notation $e^{\mathrm{i}\theta}$

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$\theta \longmapsto \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

Pour tous réels θ et θ', on a :

$$\begin{aligned} f(\theta)\times f(\theta') &= (\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta'+\mathrm{i}\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' + \mathrm{i}\cos\theta\sin\theta' + \mathrm{i}\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ &= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + \mathrm{i}(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') \\ &= \cos(\theta+\theta') + \mathrm{i}\sin(\theta+\theta') \\ &= f(\theta)+f(\theta') \end{aligned}$$

On remarque alors que la fonction f vérifie la relation fonctionnelle des fonctions exponentielles.

De plus, on peut admettre que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a alors :
$\forall\theta\in\mathbb{R},\ f'(\theta) = \cos'(\theta)+\mathrm{i}\sin'(\theta) = -\sin(\theta)+\mathrm{i}\cos(\theta) = \mathrm{i}^2\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta = \mathrm{i}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) = \mathrm{i}f(\theta)$.
Ainsi, $\forall\theta\in\mathbb{R},\ f(\theta) = k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $k\in\mathbb{R}$.
Or $f(0) = \cos 0+\mathrm{i}\sin 0 = 1+0 = 1$, et ainsi $k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\times 0} = 1$, donc $k\times 1 = 1$, donc $k = 1$. Ainsi :

DÉFINITION

On note, pour tout réel θ, $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

PROPRIÉTÉ

Conséquence :
Tout nombre complexe de module 1 se note $e^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

EXEMPLES

- $e^{i0} = 1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $e^{i\pi} = -1$.

- Reprendre les formes trigonométriques de l'ex. 34 page 245 et déterminer les notations exponentielles correspondantes.

2) Lien avec les formules de trigonométrie

a Formules d'addition

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels θ et θ', les formules d'addition s'écrivent : $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

DÉMONSTRATION

$$\begin{cases} \cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ \sin(\theta+\theta') = \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta' \end{cases}$$

Or $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')$ d'où le résultat.

b Formules de duplication

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel θ, les formules de duplication s'écrivent : $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$.

DÉMONSTRATION

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta \end{cases}$$

Or $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + i(2\cos\theta\sin\theta)$ d'où le résultat.

3) Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

DÉFINITION

Soit z un nombre complexe non nul, r le module de z et θ un argument de z.
Alors $z = re^{i\theta}$ est la forme exponentielle de z.

EXEMPLES

1) Écrire sous forme algébrique : $3e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$; $\sqrt{2}e^{3\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$; $6e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

2) Écrire sous forme exponentielle : $5\mathrm{i}$; $4+4\mathrm{i}$; $\sqrt{3}-\mathrm{i}$

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels r, r', θ et θ' :

- $re^{\mathrm{i}\theta}r'e^{\mathrm{i}\theta'} = rr'e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$
- si $r' \neq 0$, $\dfrac{re^{\mathrm{i}\theta}}{r'e^{\mathrm{i}\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(re^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta}$

DÉMONSTRATION

immédiate à l'aide des calculs avec des exponentielles.

4) Formules d'Euler et de Moivre

PROPRIÉTÉ

Formule de Moivre :
Pour tout réel θ et tout entier relatif n :

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

DÉMONSTRATION

$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$

PROPRIÉTÉ

Formule d'Euler :
Pour tout réel θ, on a :

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

DÉMONSTRATION

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) + (\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta + \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta = 2\cos\theta$

Donc $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) - (\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta - \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = 2\mathrm{i}\sin\theta$

Donc $\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$

IV Racines n-ièmes de l'unité

1) L'ensemble $\mathbb{U}$

DÉFINITION

On appelle cercle unité et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est-à-dire $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\,, |z| = 1\}$

REMARQUES

- L'ensemble des points M d'affixe z tels que $z \in \mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique.
- $0 \notin \mathbb{U}$.
- $\forall z, z' \in \mathbb{U}$, $zz' \in \mathbb{U}$ et $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$, et ainsi $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

2) Racines n-ièmes de l'unité

DÉFINITION

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racines n-ièmes de l'unité** les solutions complexes de l'équation $z^n = 1$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

PROPRIÉTÉ

- Les racines n-ièmes de l'unité sont les nombres $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier tel que $0 \leqslant k < n$.
- Il existe donc n racines n-ièmes de l'unité.
- Si $n \geqslant 3$, les racines n-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets du polygone à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique et dont un sommet a pour affixe 1.

DÉMONSTRATION

Posons $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
$z^n = 1 \iff r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1 \iff r^n = 1$ et $n\theta = 0 + 2s\pi$ (avec $s \in \mathbb{Z}$) $\iff r = 1$ (car $r > 0$) et $\theta = \dfrac{2s\pi}{n}$.

En divisant s par n, on a $s = nq + k$ avec q et k entiers et $0 \leqslant k < n$.
Ainsi, $\theta = \dfrac{2(nq+k)\pi}{n} = 2q\pi + \dfrac{2k\pi}{n}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2q\pi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = 1 \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$.
Les racines n-ièmes de l'unité sont bien les nombres $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}$ avec k entier tel que $0 \leqslant k < n$ et il y a bien n racines n-ièmes de l'unité.

EXEMPLE

- Les racines carrées de 1 sont 1 et -1.
- Les racines cubiques de 1 sont 1, $j = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \overline{j}$.
- Les racines quatrièmes de 1 sont 1, -1, i et $-$i.