Exercice 1 Résoudre un système 3×3 à l'aide de matrices

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 3 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -5 & 7 & -5 \\ -6 & 8 & -5 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

1) **a)** Vérifier que $A \times B = I_3$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

b) Que peut-on en déduire ?

2) On considère le système (S) : $\begin{cases} 4x - 6y + 5z &= 1 \\ 3x - 5y + 5z &= 2 \\ \quad -y + 2z &= -1 \end{cases}$. On pose $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) A l'aide des matrices A, V et W, écrire matriciellement le système (S).

b) En déduire la résolution de ce système.

Exercice 2 Recherche d'une fonction polynôme du second degré

On considère la parabole $\mathscr{P}$ passant par les points $A\left(2\,;\frac{4}{3}\right)$, $B(3\,;5)$ et $C(6\,;20)$.

1) Soit f la fonction polynôme du second degré représentée par $\mathscr{P}$ telle que pour tout réel x,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Justifier que la recherche de cette fonction f conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c &= \frac{4}{3} \\ 9a + 3b + c &= 5 \\ 36a + 6b + c &= 20 \end{cases}$$

2) On pose la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Traduire le système précédent en une équation matricielle de la forme $AX = B$, où A et B sont deux matrices à préciser.

3) On admet que la matrice A est inversible. Démontrer que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ -\frac{9}{4} & \frac{8}{3} & -\frac{5}{12} \\ \frac{9}{2} & -4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4) En déduire la matrice X, puis l'expression de $f(x)$.