

DIVISIBILITÉ DANS \mathbb{Z} - EXERCICES - Terminales Maths Expertes

EXERCICE 1 DIVISEURS D'UN ENTIER RELATIF

1. Démontrer que -4 est un diviseur de 32 .
2. Démontrer que $n + 1$ est un diviseur de $n^2 - 1$ pour tout entier naturel n .
3. Soit n un entier relatif impair. Démontrer que la somme de n entiers consécutifs est toujours un multiple de n . (On commencera par étudier le cas $n = 3$).
4. Combien y a-t-il de multiples de 13 entre 1 et $1\ 000$?
5. (a) Combien y a-t-il de multiples de 75 compris entre $10\ 000$ et $20\ 000$?
(b) Leur somme est-elle un multiple de 75 ?
6. Soit a un entier à deux chiffres et b l'entier obtenu en intervertissant les chiffres de a . Démontrer que $a - b$ est un multiple de 9 et que $a + b$ est un multiple de 11 .

EXERCICE 2 OPÉRATIONS SUR LES CONGRUENCES

1. On donne $a \equiv 6 [11]$ et $b \equiv 5 [11]$.
(a) Déterminer le reste dans la division euclidienne par 11 de $2a + 3b$, $a^2 + b^2$ et ab .
(b) Montrer que $a^2 - b^2$ est divisible par 11 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $7^n + 3^n + 2$ est divisible par 4 .
3. Montrer que 7305^3 et 7322^3 ont le même reste dans la division euclidienne par 17 .
4. Déterminer le reste dans la division euclidienne par 7 de 25×2^{17} .
5. Déterminer le reste dans la division euclidienne par 13 de 124×3^{21} .
6. Déterminer le reste dans la division euclidienne par 11 de 2014^{21014} .
7. Déterminer le reste dans la division euclidienne par 11 de 2012^{2012} .
8. Déterminer le reste dans la division euclidienne par 17 de 2^{2013} .
9. Déterminer le reste dans la division euclidienne par 15 de 2^{2015} .
10. Montrer que $2^{11} + 1$ est divisible par 3 .
11. Montrer que $5^{10} + 1$ est divisible par 13 .
12. Déterminer le chiffre des unités de 11^{1000} .
13. Déterminer le chiffre des unités de 3^{1000} .
14. Déterminer le chiffre des unités de 2^{63} .
15. En étudiant les restes possibles de x dans la division euclidienne par 7 , résoudre les équations suivantes :
(a) $3x \equiv 1 [7]$.
(b) $5x \equiv 1 [7]$.