Terminale Maths Expertes – Chapitre 01

NOMBRES COMPLEXES – Partie 1

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

Table des matières

I Activité d'introduction

Jérome Cardan (1501-1576) a fourni, dans son ouvrage *Ars Magna*, une formule pour déterminer une solution x_0 de l'équation $x^3 + px + q = 0$, dans le cas où $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$:

$$x_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$$

1) Exemple 1 : quand tout se passe bien

On considère l'équation $x^3 - 36x - 91 = 0$.

1) Vérifier que, dans ce cas, $4p^3 + 27q^2 \geqslant 0$.

2) Appliquer la formule de Cardan afin de déterminer une solution x_0 de cette équation.

3) Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x, $x^3 - 36x - 91 = (x - x_0)(x^2 + ax + b)$

4) Achever alors la résolution de l'équation $x^3 - 36x - 91 = 0$. Combien a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

2) Exemple 2 : quand ça se passe (un peu) moins bien

On considère l'équation $(E) : x^3 - 15x - 4 = 0$.

1) Calculer $4p^3 + 27q^2$. Peut-on appliquer la formule de Cardan à cette équation ?

2) A l'aide de la calculatrice, conjecturer le nombre de solutions de cette équation.

3) Pour résoudre cette équation malgré le problème posé par le signe de $4p^3 + 27q^2$, Cardan utilise des racines de nombres négatifs. Plus tard, Raffaelle Bombelli (1526-1572) introduira un nombre « imaginaire », que nous noterons i, tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Ainsi, dans le cas présent, on peut écrire $\dfrac{p^3}{27} + \dfrac{q^2}{4} = -121 = 11^2 \times \mathrm{i}^2 = (11\mathrm{i})^2$.

- **a)** En utilisant le nombre i, démontrer que pour déterminer la solution de l'équation (E) par la formule de Cardan, il suffit de trouver deux nombres « imaginaires » dont les cubes s'écrivent $2 + 11\mathrm{i}$ et $2 - 11\mathrm{i}$.
- **b)** En utilisant les opérations de calcul des nombres réels et l'égalité $\mathrm{i}^2 = -1$, démontrer que :

$$(2 + \mathrm{i})^3 = 2 + 11\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad (2 - \mathrm{i})^3 = 2 - 11\mathrm{i}.$$

- **c)** En déduire que 4 est la valeur donnée par la formule de Cardan pour l'équation (E).
- **d)** Vérifier que 4 est bien solution de l'équation (E).

4) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $x^3 - 15x - 4 = (x - 4)(x^2 + ax + b)$.

5) Achever la résolution de l'équation (E).

II Un peu d'histoire

1) Chronologie des ensembles de nombres

⇒ Travail dans $\mathbb{N}$, muni d'une addition et d'une multiplication (qui découle de l'addition).
⇒ La mesure des grandeurs amène à travailler sur les fractions des nombres positifs : $\mathbb{Q}_+$.
⇒ Avec les nombres négatifs associés, les opérations $+, -, \times, \div$ sont toujours possibles, sauf la division par 0. (Notion de « corps »)
⇒ La création des complexes a précédé la création des réelles (faite à partir des rationnels) :
Cardan (mathématicien italien du XVI$^{\text{e}}$ siècle) publie une méthode de résolution des équations du 3$^{\text{e}}$ degré (découverte dans l'activité précédente), qui l'amène à envisager des nombres « impossibles », ou « imaginaires », considération reprise et précisée par **Bombelli**, un de ses disciples.
Ces nombres (ex : $\sqrt{-4}$) convenablement manipulés conduisent à des résultats réels corrects : des résultats « vrais » peuvent être atteints par des opérations sur des nombres « imaginaires ».
⇒ Au milieu du XVI$^{\text{e}}$ siècle, **Cardan** et **Tartaglia** publient des formules donnant les solutions d'équations du troisième degré.
⇒ **Bombelli** note des paradoxes dans ces formules et en 1572 propose la notation « $\sqrt{-1}$ » pour lever ces problèmes.
⇒ en 1777, **Euler** déclare que la notation $\sqrt{-1}$ est absurde car elle conduit à une contradiction : $(\sqrt{-1})^2 = -1$ par définition, or $(\sqrt{-1})^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = 1$ en appliquant les propriétés sur les racines carrées. Il introduit donc la notation i qui désigne le nombre vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.
⇒ Utiliser avec une confiance grandissante aux XVII$^{\text{e}}$ et XVIII$^{\text{e}}$ siècles, les nombres imaginaires trouvèrent leur statut définitif au XIX$^{\text{e}}$ siècle par l'allemand **Gauss**, sous le nom de « nombres complexes ».

Historiquement : $\mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Q}_+ \Rightarrow \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{R}$
Algébriquement : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2) La querelle de Fontana et Cardan

Au XVI$^{\text{e}}$ siècle, les mathématiciens se défiaient lors de concours mathématiques publics, au cours desquels ils montraient leur habileté [1]. Ils avaient ainsi pour habitude de garder secrètes leurs découvertes.
Au cours de l'un de ces concours, le mathématicien Niccolo Fontana dit Tartaglia (« Le Bègue ») (1499-1557) trouva en 1534 une méthode générale pour résoudre les équations du type $x^2 + px + q = 0$. Il semble qu'il ait été le premier à utiliser pour cela la racine carrée d'un nombre négatif. Il garda sa méthode secrète, mais accepta de la dévoiler à Cardan, à la condition que celui-ci la garde secrète.
Cardan développa la méthode de Fontana et réussit à l'étendre à toute équation du 3$^{\text{e}}$ degré et du 4$^{\text{e}}$ degré (avec son assistant Ferrari). Apprenant que la méthode de Fontana avait été découverte avant celui-ci par Scipione del Ferro, il passa outre sa promesse et publia ces résultats dans son *Ars magna* (1545).
Dans *Quesiti et invenzioni diverse* (1546), Fontana attaqua violemment Cardan ; il s'ensuivit une longue querelle avec Cardan et Ferrari. Celle-ci prit fin au cours d'un concours entre Fontana et Ferrari, que Ferrari gagna.
C'est finalement le nom de Cardan qui resta associé à cette méthode de résolution.

1. Tiré du manuel Transmath 2012, Nathan

III L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1) Définitions et propriétés

DÉFINITION

- Un nombre complexe est un nombre de la forme $x + y\mathrm{i}$, où x et y sont des réels et i un nombre imaginaire tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- L'écriture $x + y\mathrm{i}$ avec x et y réels est unique et appelée la **forme algébrique** du nombre complexe.

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x, $x = x + 0 \times \mathrm{i}$, donc tout réel x appartient aussi à $\mathbb{C}$: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

DÉFINITION

Vocabulaire :
Si z est un nombre complexe tel que $z = x + y\mathrm{i}$, avec x et y des réels, alors :
- x est appelée la **partie réelle** de z et on la note $x = \mathrm{Re}(z)$.
- y est appelée la **partie imaginaire** de z et on la note $y = \mathrm{Im}(z)$.
- Tout nombre complexe de la forme $z = y\mathrm{i}$, $y \in \mathbb{R}$ est appelé **imaginaire pur**.

PROPRIÉTÉ **admise**

Soient z et z' deux nombres complexes.
- $z = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- $z = z' \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$.
- z est imaginaire pur $\iff \mathrm{Re}(z) = 0$.

EXEMPLES

- $3 + 4\mathrm{i}$ est la forme algébrique d'un nombre complexe.
- $\sqrt{2}$ est la forme algébrique d'un nombre complexe.
- $-3\pi\mathrm{i}$ est la forme algébrique d'un nombre complexe.
- $2 + \mathrm{i}^2$ est un nombre complexe dont la forme algébrique est 1.

EXERCICE

Soit x un réel et soient z et z' deux nombres complexes définis par
$z = x^2 - x - 2 + 3\mathrm{i}x$ et $z' = -2x + \mathrm{i}(x^2 + x + 1)$. Déterminer les éventuelles valeurs de x telles que :

1) z soit un imaginaire pur (donner alors z).

2) z' soit un réel (donner alors z').

3) z et z' soient égaux (donner alors z et z').

2) Somme et produit

PROPRIÉTÉ admise

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

EXEMPLES

Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :
$(1+2\mathrm{i})+(-3+4\mathrm{i})$; $(1+2\mathrm{i})\times(-3+4\mathrm{i})$; $(-1+\mathrm{i})^2$
$(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$; $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$; $\dfrac{1}{2-3\mathrm{i}}$

REMARQUE

On retrouve par simple développement les identités remarquables appliquées aux nombres complexes :
Pour tous réels x et y, on a $(x+\mathrm{i}y)^2 = x^2+2\mathrm{i}xy-y^2$; $(x-\mathrm{i}y)^2 = x^2-2\mathrm{i}xy-y^2$ et $(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) = x^2+y^2$

3) Conjugué d'un nombre complexe

a Définition

DÉFINITION

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $x+y\mathrm{i}$, avec x et y des réels.
On appelle **conjugué de** z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$.

EXEMPLES

- $\overline{3+2\mathrm{i}} = 3-2\mathrm{i}$
- $\overline{\mathrm{i}-1} = -\mathrm{i}-1$
- $\overline{-4} = -4$
- $\overline{3\mathrm{i}} = -3\mathrm{i}$

b Propriétés

PROPRIÉTÉS admises

Soit z un nombre complexe de la forme $z = x+\mathrm{i}y$, avec x et y des réels.
- $z+\overline{z} = 2x = 2\mathrm{Re}(z)$.
- $z-\overline{z} = 2y\mathrm{i} = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
- $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$.
- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $z\overline{z} = x^2+y^2$

REMARQUE

Les démonstrations sont rapides par simples développements.

EXEMPLES

- Calculer $(3+2\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})$; $\dfrac{1-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $2\overline{z}+3\mathrm{i}=3+\mathrm{i}+3\overline{z}$ et $2z-\mathrm{i}\overline{z}=7-6\mathrm{i}$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(2+\mathrm{i})z-3=4\mathrm{i}z+1$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z+3\mathrm{i}=\mathrm{i}\overline{z}+2$.

c Conjugués et opérations

THÉORÈME

Soient z et z' deux nombres complexes et n un entier relatif. Alors :

$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$; $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$ pour $z\neq 0$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ pour $z'\neq 0$;

$\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$ (avec $z\neq 0$ si $n<0$)

DÉMONSTRATION

Posons $z=x+y\mathrm{i}$ et $z'=x'+y'\mathrm{i}$, avec x, y, x' et y' des réels.

- Les deux premières se prouvent par simples développements.
- Utiliser le fait que $z\times\dfrac{1}{z}=1$ et $\dfrac{z}{z'}=z\times\dfrac{1}{z'}$.
- Pour la dernière, on peut le démontrer par récurrence pour $n\in\mathbb{N}$ puis étendre dans $\mathbb{Z}$ avec la 3$^{\text{ème}}$ propriété.

PROPRIÉTÉ

Soient z et z' deux nombres complexes avec $z'\neq 0$.

Alors $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}}$ donne la forme algébrique de $\dfrac{z}{z'}$

DÉMONSTRATION

Évident puisque $z'\overline{z'}=x'^2+y'^2$.

EXEMPLES

- $\dfrac{1+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}=\dfrac{(1+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{9+4}=\dfrac{3+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}-2}{13}=\dfrac{1}{13}+\dfrac{5}{13}\mathrm{i}$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$: $\mathrm{i}(z-3\mathrm{i})=2z-1+\mathrm{i}$

IV Binôme de Newton

Cette partie introduit de façon rapide une notion qui sera vue plus en profondeur en Spécialité Mathématiques dans le courant de l'année (chapitre Probabilités).

1) Factorielle d'un entier naturel

DÉFINITION

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle **factorielle** n, l'entier naturel noté $n!$ (« factorielle n ») défini par :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$$

REMARQUE

Par convention, on admet que $0\,! = 1$.

EXEMPLES

- Calculer $4\,!$
- Calculer astucieusement $\dfrac{7\,!}{5\,!}$.

2) Combinaisons

DÉFINITION

Soit n un entier naturel.
Soit E un ensemble fini à n éléments et soit k un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
On appelle **combinaison** de k éléments de E toute partie de E à k éléments.
Le nombre de combinaison de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».

PROPRIÉTÉ admise

Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

REMARQUE

Cette formule sera démontrée en Spécialité Mathématiques.

EXEMPLE

Calculer $\binom{5}{1}$; $\binom{6}{0}$; $\binom{5}{3}$; $\binom{5}{2}$

3) Formule du binôme de Newton

PROPRIÉTÉS

- Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

- Soit n un entier naturel. Alors :

$$\binom{n}{0} = 1$$

- Soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$\binom{n}{1} = n \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{n} = 1$$

- Soient n et k deux entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Alors la **relation de Pascal** est :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

DÉMONSTRATION

Ces propriétés seront démontrées en Spécialité.

Le **triangle de Pascal** permet d'obtenir rapidement les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour les premières valeurs de k et de n :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$n=5$	1	5	10	10	5	1	
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres complexes a et b non nuls et pour tout entier naturel n, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

DÉMONSTRATION

Démontrons par récurrence que P_n : « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : montrons que P_0 est vraie : P_0 : « $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}\, b^k$ »

D'une part, $(a+b)^0 = 1$ et d'autre part, $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}\, b^k = \binom{0}{0} a^0\, b^0 = 1 \times 1 \times 1 = 1$, donc on a bien $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}\, b^k$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons la proposition P_n vraie pour un entier naturel n fixé et montrons alors que P_{n+1} est vraie :

Hypothèse de récurrence : P_n : « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$ »

Ce que l'on veut montrer : P_{n+1} : « $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k$ »

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence)}\\
&= a \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k + b \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k\\
&= \tbinom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}\\
&= \tbinom{n}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} a^0 b^{n+1}\\
&= \tbinom{n+1}{0} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^0 b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k \qquad \text{donc } P_{n+1} \text{ est vraie.}
\end{aligned}
$$

Conclusion : la proposition P_n étant vraie au rang 0 et héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

EXEMPLE

Calculer $(z-1)^4$; $(2+\mathrm{i})^3$; $(1-\mathrm{i})^5$

V Équations du second degré à coefficients réels

1) Équations $z^2 - a = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$

(*Pas d'énoncé de théorème, il est préférable de refaire la résolution complète à chaque fois*)

• Si $a > 0$:
$z^2 - a = 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a}) = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$

• Si $a = 0$:
$z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z = 0$

• Si $a < 0$:
$z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z^2 - \mathrm{i}^2(-a) = 0 \Leftrightarrow z^2 - (\mathrm{i}\sqrt{-a})^2 = 0 \Leftrightarrow (z - \mathrm{i}\sqrt{-a})(z + \mathrm{i}\sqrt{-a}) = 0 \Leftrightarrow z = -\mathrm{i}\sqrt{-a}$ ou $z = i\sqrt{-a}$

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -5$.

2) Équations $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b et c des réels et $a \neq 0$

THÉORÈME

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet **toujours** des solutions (réelles ou complexes).
Soit Δ le discriminant de $az^2 + bz + c$.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles : $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution réelle double : $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes : $z_1 = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c = 0 \quad &\Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \text{ car } a \neq 0.\\
&\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0\\
&\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0
\end{aligned}$$

D'après le **IV 1** :

- Si $\Delta > 0$, $z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z + \dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ d'où le résultat.
- Si $\Delta = 0$, $z + \dfrac{b}{2a} = 0$ d'où $z = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, $z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ d'où le résultat.

REMARQUE

Dans le cas où $\Delta < 0$, on a $z_2 = \overline{z_1}$.

EXEMPLES

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $z^2 = -9$.

2) $z^2 + 2z + 3 = 0$.

3) $(z^2 + 2)(z^2 - 4z + 4) = 0$.

VI Polynômes de degré n

1) Définition

DÉFINITION

Soit n un entier naturel et soient a_0, a_1, ..., a_n des réels avec $a_n \neq 0$.
On appelle **fonction polynôme de degré n à coefficients réels** (ou plus simplement polynôme de degré n) la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

REMARQUES

• Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé le polynôme nul ; il n'a pas de degré entier naturel.
• Si il existe un entier i compris entre 0 et n tel que $a_i \in \mathbb{C}$, le polynôme est dit à coefficients complexes.

2) Factorisation par $z - a$

PROPRIÉTÉ

Soient z et a deux nombres complexes, et soit n un entier naturel non nul. Alors :

$$z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \ldots + a^{n-2} z + a^{n-1}) = (z - a) \sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$$

DÉMONSTRATION

$(z-a)(z^{n-1}+az^{n-2}+a^2z^{n-3}+\ldots+a^{n-2}z+a^{n-1}) = z^n+az^{n-1}+\ldots+a^{n-1}z-az^{n-1}-a^2z^{n-2}-\ldots-a^{n-1}z-a^n = z^n - a^n$

EXEMPLE

$z^3 - 8 = z^3 - 2^3 = (z-2)(z^2+2z+4)$

PROPRIÉTÉ

Soit a un nombre complexe, n un entier naturel non nul et soit P un polynôme de degré n.
$P(a) = 0 \iff P$ se factorise par $z - a$
$\iff$ il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z-a)Q(z)$

DÉMONSTRATION

$\forall z \in \mathbb{C}$, soit $P(z) = b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0$, avec b_0, ..., b_n des complexes et $b_n \neq 0$.
$P(a) = 0 \iff P(z) = P(z) - P(a)$
$\iff P(z) = b_n(z^n - a^n) + b_{n-1}(z^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + b_1(z-a)$.
Or pour tout entier k compris entre 1 et n, on a $z^k - a^k = (z-a)(z^{k-1} + az^{k-2} + \ldots + a^{k-1})$. Ainsi :
$P(a) = 0 \iff P(z) = (z-a)\left[b_n(z^{n-1} + az^{n-2} + \ldots + a^{n-1}) + b_{n-1}(z^{n-2} + az^{n-3} + \ldots + a^{n-2}) + \ldots + b_1\right]$
$\iff P(z) = (z-a)Q(z)$ avec Q de degré $n-1$.

EXEMPLE

Soit $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$.
Vérifier que 2 est une racine de P, puis factoriser $P(z)$ et déterminer les autres racines de P.

3) Propriété sur les racines d'un polynôme de degré n

PROPRIÉTÉ

Pour tout entier naturel n, un polynôme de degré n admet au plus n racines dans $\mathbb{C}$.

DÉMONSTRATION

Démontrons cette propriété par récurrence, en posant R_n la proposition « Un polynôme de degré n admet au plus n racines. »

Initialisation :
Un polynôme de degré 0 est une constance non nulle, il n'a donc pas de racine, donc R_0 est vraie.

Hérédité :
Supposons la proposition R_n vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire que tout polynôme de degré n possède au plus n racines (hypothèse de récurrence).
On veut alors montrer que R_{n+1} est vraie, c'est-à-dire que tout polynôme de degré $n+1$ possède au plus $n+1$ racines.
Soit P un polynôme de degré $n+1$.
Si P n'a pas de racine, alors R_{n+1} est vraie (puisque $0 \leqslant n+1$).
Si P possède au moins une racine a, alors, P est factorisable par $z-a$ et on a $P(z) = (z-a)Q(z)$, avec Q un polynôme de degré n. Donc d'après l'hypothèse de récurrence, Q possède au plus n racines.
Donc P possède au plus $n+1$ racines (celles de Q plus éventuellement a si ce n'est pas déjà une racine de Q). Donc R_{n+1} est vraie.

Conclusion :
R_0 est vraie et R_n est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, R_n est vraie, c'est-à-dire qu'un polynôme de degré n possède au plus n racines.

REMARQUE

En fait, un polynôme de degré n possède exactement n racines complexes, si on compte les racines doubles, triples etc.

PROPRIÉTÉ

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme de degré n (avec $a_n \neq 0$). Alors :

- La somme de toutes les racines de P est égale à $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$;
- Le produit de toutes les racines de P est égal à $(-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$.

DÉMONSTRATION

Soient z_1, z_2, ..., z_n les racines (éventuellement doubles, triples, ...) de P.
Ainsi, $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)$.
En développant, on a alors $P(z) = a_n z^n - a_n z^{n-1}(z_1 + z_2 + ... + z_n) + ... + a_n(-1)^n z_1 z_2 ... z_n$
Par identification avec $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$, on obtient le résultat attendu.