Terminale Maths Complémentaires – Thème 09

TEMPS D'ATTENTE

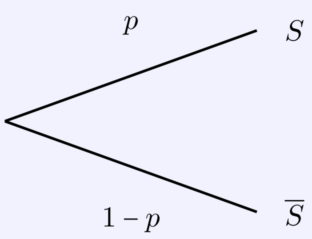


Table des matières

I Loi géométrique

1) Définition

DÉFINITION

Soit p un réel appartenant à $]0\,;1[$.
On considère une épreuve de Bernoulli dont la probabilité du succès est p. On répète l'épreuve de Bernoulli de manière indépendante.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le premier succès.
Alors on dit que X suit la **loi géométrique de paramètre** p et on le note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

REMARQUE

La variable aléatoire X peut donc prendre toutes les valeurs entières supérieures ou égales à 1.

EXEMPLE

On lance un dé équilibré à 6 faces tant que l'on n'a pas obtenu le 6.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de lancers de dés à effectuer avant d'obtenir un 6.
Alors X suit la loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{6}$.

2) Calcul de probabilité

PROPRIÉTÉ

Soit $p \in]0\,;1[$ et soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
Alors pour tout entier naturel k non nul, $P(X=k) = p \times (1-p)^{k-1}$.

DÉMONSTRATION

L'événement $X = k$ signifie que le premier succès est réalisé à la k-ème épreuve de Bernoulli, et donc qu'il y a eu avant $k-1$ échecs. Comme les répétitions sont indépendantes, on effectue le produit des probabilités des $k-1$ échecs (soit $(1-p)^{k-1}$) et de l'unique succès $p^1 = p$, d'où le résultat.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, on a donc, par exemple :

$P(X=1) = \dfrac{1}{6} \times \left(1-\dfrac{1}{6}\right)^{1-1} = \dfrac{1}{6} \times 1 = \dfrac{1}{6}$, donc la probabilité d'obtenir 6 au 1$^{\text{er}}$ lancer est de $\dfrac{1}{6}$;

$P(X=2) = \dfrac{1}{6} \times \left(1-\dfrac{1}{6}\right)^{2-1} = \dfrac{5}{36} \approx 0{,}139$, donc la probabilité d'obtenir 6 au 2$^{\text{ème}}$ lancer est d'environ 0,139 ;

De même, on obtient, en valeurs approchées à 10^{-3} près :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$	0,167	0,139	0,116	0,096	0,080	0,067	0,056	0,047	0,039	0,032

REMARQUE

Plus la valeur de k augmente, plus $P(X=k)$ diminue. En effet, puisque $p \in]0\,;1[$, alors $1-p \in]0\,;1[$, donc la suite de terme général $p(1-p)^{k-1}$ (et de rang k) est décroissante et tend vers 0.

PROPRIÉTÉ

Soit $p \in]0\,;1[$ et soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
Alors pour tout entier naturel k non nul, $P(X > k) = (1-p)^k$ et $P(X \leqslant k) = 1-(1-p)^k$.

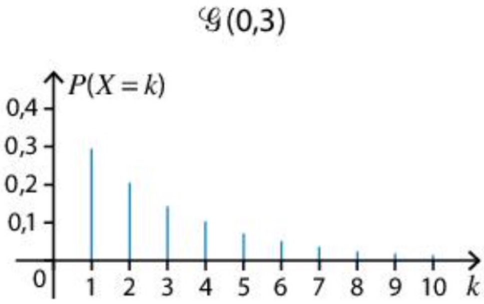
DÉMONSTRATION

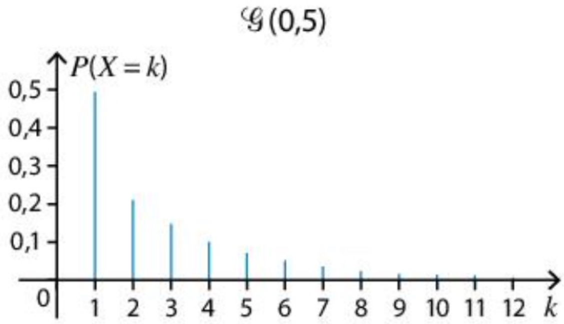
- $$\begin{aligned} P(X \leqslant k) &= P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=k) \\ &= p(1-p)^0 + p(1-p)^1 + p(1-p)^2 + \ldots + p(1-p)^{k-1} \\ &= p\left(1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots + (1-p)^{k-1}\right) \\ &= p \times \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \\ &= p \times \frac{1-(1-p)^k}{p} \\ &= 1-(1-p)^k. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} P(X > k) &= 1 - P(X \leqslant k) \\ &= 1 - (1-(1-p)^k) \\ &= (1-p)^k. \end{aligned}$$

3) Représentation graphique

On a vu précédemment que la suite géométrique de terme général $p(1-p)^{k-1}$ et de rang k était décroissante et convergeait vers 0. On obtient donc une représentation graphique du type suivant :





4) Loi sans mémoire

PROPRIÉTÉ

Soit $p \in]0\,;1[$ et soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
Alors pour tous entiers k et ℓ non nuls, on a :

$$P_{(X>k)}(X > k+\ell) = P(X > \ell)$$

DÉMONSTRATION

$$P_{(X>k)}(X > k+\ell) = \frac{P((X>k)\cap(X>k+\ell))}{P(X>k)} = \frac{P(X>k+\ell)}{P(X>k)} = \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^k} = (1-p)^{k+\ell-k} = (1-p)^\ell = P(X>\ell)$$

REMARQUE

On dit que la loi géométrique est une loi de probabilité **sans mémoire** : la probabilité que $X > k + \ell$ sachant que $X > k$ ne dépend pas de k mais seulement de ℓ.

5) Espérance, variance et écart-type

PROPRIÉTÉ **admise**

Soit $p \in]0;1[$ et soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad ; \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2} \quad ; \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

II Loi à densités

1) Activité d'approche

Voir la fiche d'activité introduction de la notion.

2) Variable aléatoire discrète et variable aléatoire continue

Dans les situations et expériences aléatoires étudiées jusqu'à présent était associé un univers **fini** : toutes les variables aléatoires rencontrées ne prenaient jusqu'à alors qu'un nombre fini de valeurs x_1, x_2, ..., x_n.

On dit que ces variables aléatoires sont **discrètes**.

Cependant, certaines expériences aléatoires conduisent à utiliser des variables aléatoires qui prennent **un nombre infini de valeurs** comprises dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

On dit que ces variables aléatoires sont **continues**.

EXEMPLES

- On tire sur une cible circulaire de rayon 1 mètre, sans jamais la manquer. La variable aléatoire qui indique la distance, en mètre, du point d'impact au centre prend toutes les valeurs réelles comprises dans l'intervalle $[0;1]$.
- On tire au hasard un nombre de l'intervalle $[5;20]$. La variable aléatoire qui donne ce nombre est un réel (pas forcément entier) de l'intervalle $[5;20]$.

3) Loi de probabilités

Si X est une variable aléatoire continue, il n'est alors plus possible de définir la loi de X en dressant le tableau des probabilités de chacun des événements « $X = x_k$ » puisqu'il y en a une infinité.
Une autre approche est alors nécessaire :
On s'intéresse ainsi aux événements du type « X prend ses valeurs dans un intervalle J », noté « $X \in J$ », et on cherche alors la probabilité $P(X \in J)$.

EXEMPLES

- Pour l'exemple de la cible, on cherchera par exemple $P(X \in [0\,;0{,}2])$.
- Pour l'exemple du nombre tiré au hasard, on cherchera par exemple $P(15 < X < 20)$.

On peut résumer ainsi :

PROPRIÉTÉ

Comment définir la loi de probabilités d'une variable aléatoire ?

• Si X est une variable aléatoire **discrète**, sa loi est définie par un tableau (ex : lancer d'un dé pipé) ou une formule générale (ex : loi binomiale ou équiprobabilité).

• Si X est une variable aléatoire **continue**, alors $\forall k \in \mathbb{R}$, $P(X = k) = 0$, et on définie la loi de X grâce à une fonction, appelée **densité de la loi de probabilité de** X, permettant de calculer $P(X \in I)$, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

4) Densité de probabilité

DÉFINITION

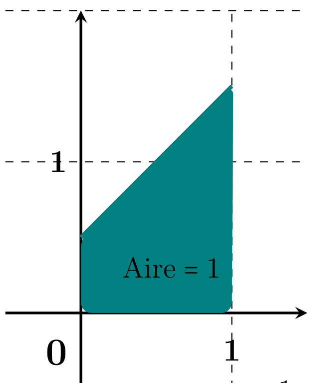
On appelle densité de probabilité sur un intervalle $[a\,;b]$ une fonction f telle que :

- f est continue sur $[a\,;b]$.
- f est positive sur $[a\,;b]$.
- L'aire sous la courbe de f sur $[a\,;b]$ est égale à 1 u.a.

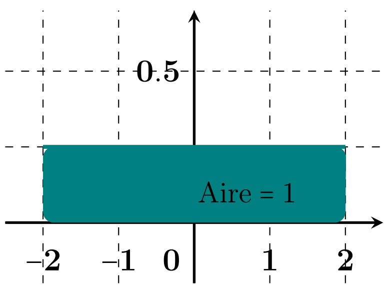
REMARQUE

Puisque f est continue et positive sur $[a\,;b]$, la troisième condition peut aussi s'écrire $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

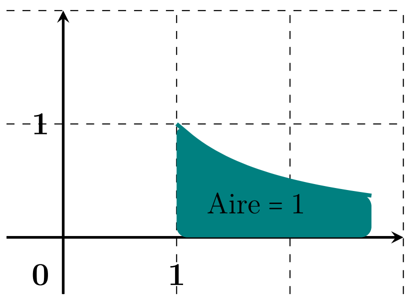
EXEMPLES



La fonction $x \mapsto x + \dfrac{1}{2}$ sur $[0\,;1]$



La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{4}$ sur $[-2\,;2]$

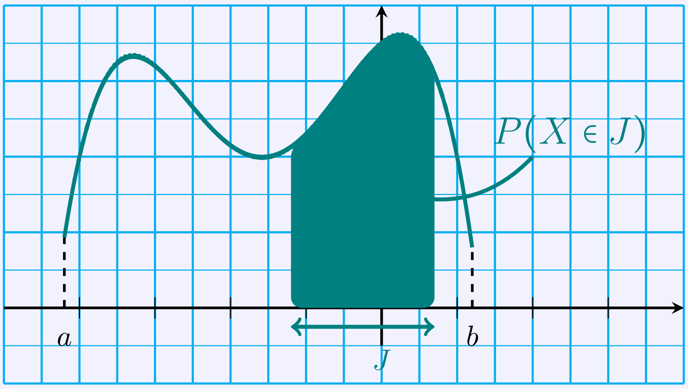


La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $[1\,;\mathrm{e}]$

5) Loi à densité

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f sur un intervalle $I = [a;b]$.
Pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$, la probabilité de l'événement « $X \in J$ » est l'aire du domaine $\{M(x;y), x \in J \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$.



REMARQUE

$\forall\, k \in I$, $\int_k^k f(t)\,\mathrm{d}t$, donc $P(X = k) = 0$, et ainsi pour tous réels c et d de I tels que $c < d$, on a :

$$P(X \in [c;d]) = P(X \in [c;d[) = P(X \in]c;d]) = P(X \in]c;d[)$$

6) Calculs de probabilités

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f sur I.
- Pour tout c de I, $P(X = c) = 0$.
- Pour tous c et d de I tels que $c < d$,

$P(X \in [c;d]) = P(X \in [c;d[) = P(X \in]c;d]) = P(X \in]c;d[) = \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $I = [a;+\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$:

Pour tout c de I, $P(X \in [c;+\infty[) = P(X \geqslant c) = 1 - P(X < c) = 1 - P(a < X < c) = 1 - \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE

Soit X la variable aléatoire continue à valeurs dans $[0\,;1]$, de densité la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 3x^2$.

1. Justifier que f est bien une densité sur $[0\,;1]$.
2. Déterminer $P(X = 0{,}43)$.
3. Calculer $P(0{,}1 < X < 0{,}4)$.
4. Calculer $P(X \leqslant 0{,}5)$. En déduire $P(X \geqslant 0{,}5)$.
5. Calculer $P_{(0{,}3 \leqslant X \leqslant 0{,}7)}(0{,}5 < X < 0{,}8)$.

7) Fonction de répartition d'une loi à densité

DÉFINITION

Soit f une fonction de densité sur $[a\,;b]$, et soit X une variable aléatoire suivant la loi de probabilité de fonction de densité f.
On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire X la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

REMARQUES

- F est donc la primitive de f qui s'annule en a.
- Pour tous réels c et d (avec $c \leqslant d$) de l'intervalle $[a\,;b]$, $P(c \leqslant X \leqslant d) = F(d) - F(c) = P(X \leqslant d) - P(X \leqslant c)$.

8) Espérance et variance d'une variable aléatoire à densité f sur $I = [a;b]$

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire à densité f sur $[a;b]$. Alors :

$$E(X) = \int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad V(X) = \int_a^b t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - (E(X))^2$$

EXEMPLE

Soit X la variable aléatoire suivant la loi de densité f définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = 3x^2$.

Alors l'espérance de X est $E(X) = \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (t \times 3t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 3t^3\,\mathrm{d}t = \left[\dfrac{3t^4}{4}\right]_0^1 = \dfrac{3}{4} - 0 = \dfrac{3}{4}$.

III Loi uniforme sur $[a;b]$

1) Définition

EXERCICE

Soit f la densité de probabilité d'une probabilité uniforme sur $[a;b]$. Déterminer f.

Correction :
La probabilité étant uniforme sur $[a;b]$, alors f est une fonction constante. Soit k cette constante.
De plus, f étant une densité de probabilité sur $[a;b]$, on a $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
Ainsi, $\int_a^b f(x) = 1 \Leftrightarrow \int_a^b k\,\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow [kx]_a^b = 1 \Leftrightarrow kb - ka = 1 \Leftrightarrow (b-a)k = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{b-a}$ $(a \neq b)$.

DÉFINITION

La loi uniforme sur $[a;b]$ est la loi de probabilité de densité la fonction constante sur $[a;b]$ définie par

$$x \longmapsto \frac{1}{b-a}$$

REMARQUE

« Choisir un réel au hasard de $[a;b]$ », c'est le choisir selon la loi uniforme sur $[a;b]$.

2) Propriété

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$.
Pour tous c et d de $[a;b]$ tels que $c \leqslant d$, $P(X \in [c;d]) = P(c \leqslant X \leqslant d) = \dfrac{d-c}{b-a}$.

DÉMONSTRATION

$$P(X \in [c;d]) = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d = \frac{d}{b-a} - \frac{c}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}.$$

EXEMPLE

On choisit un nombre réel entre 0 et 1.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir $\dfrac{1}{4}$? (*Réponse : 0*)
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre compris entre $\dfrac{1}{8}$ et $\dfrac{1}{6}$? (*Réponse :* $\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}{1-0} = \dfrac{1}{24}$.)

3) Espérance et variance de la loi uniforme

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a;b]$. Alors :

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

DÉMONSTRATION

- $E(X) = \displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b t \times \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$
- La formule de la variance est admise.

IV Lois exponentielles

1) Définition

DÉFINITION

Soit λ un réel **strictement positif**.
La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi de probabilité de densité la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

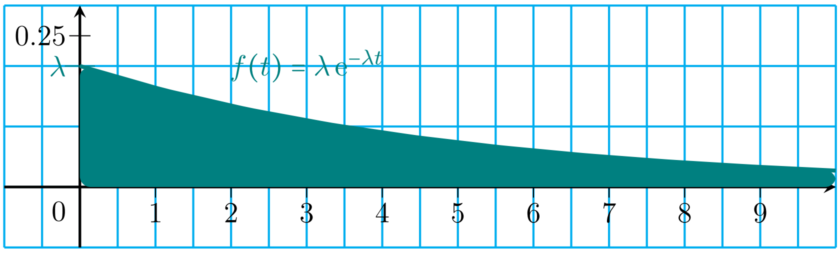
REMARQUE

f est bien une fonction densité de probabilité :
- f est continue sur $[0;+\infty[$.
- $f \geqslant 0$ sur $[0;+\infty[$ (car $\lambda > 0$).
- $\forall x \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = 0$ (car $\lambda > 0$), donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

EXEMPLE

Courbe de f dans le cas où $\lambda = 0{,}2$:



2) Propriété

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
Pour tout intervalle $[c;d]$ de $[0;+\infty[$:
- $P(X \in [c;d]) = P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
- $P(X \leqslant c) = 1 - e^{-\lambda c}$.
- $P(X \geqslant c) = e^{-\lambda c}$.

DÉMONSTRATION

- $P(c \leqslant X \leqslant d) = \displaystyle\int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_c^d = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
- $P(X \leqslant c) = P(0 \leqslant X \leqslant c) = e^{-\lambda\times 0} - e^{-\lambda c} = 1 - e^{-\lambda c}$.
- $P(X \geqslant c) = 1 - P(X < c) = 1 - P(X \leqslant c) = 1 - (1 - e^{-\lambda c}) = e^{-\lambda c}$.

EXEMPLE

La variable aléatoire X égale à la durée de vie en jours d'un atome radioactif d'iode 131 avant désintégration suit une loi exponentielle.
On sait que la probabilité que cette durée de vie soit inférieure à 2 jours est égale à 0,160 à 10^{-3} près.

1. Calculer, à 10^{-3} près, le paramètre λ de la loi.
2. La demi-vie d'une substance radioactive est le temps t au bout duquel la moitié des atomes initiaux sont désintégrés. Calculer la demi-vie de l'iode 131 (en jours).

Correction :

1. On a $P(X \leqslant 2) \approx 0{,}160$. Donc $1 - e^{-2\lambda} \approx 0{,}160$. Donc $e^{-2\lambda} \approx 0{,}840$.
   Donc $\lambda \approx \dfrac{-\ln(0{,}840)}{2}$ soit $\lambda \approx 0{,}087$.
2. On cherche t tel que $P(X \leqslant t) = \dfrac{1}{2}$, donc $1 - e^{-\lambda t} = \dfrac{1}{2}$ donc $t = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \approx \dfrac{\ln 2}{0{,}087} \approx 8$ jours.

3) Durée de vie sans vieillissement

PROPRIÉTÉ

Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors T vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement :
Pour tous t et h strictement positifs, $P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = P(T \geqslant h)$.

DÉMONSTRATION

$P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \dfrac{P(T \geqslant t \cap T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t)}$

$P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \dfrac{P(T \geqslant t+h)}{P(T \geqslant t}$ (car $h > 0$)

$P_{(T\geqslant t)}(T \geqslant t+h) = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(T \geqslant h)$.

EXEMPLE

La durée de vie T en année d'un composant radioactif suit une loi exponentielle.
Sachant que le composant ne s'est pas désintégré au bout de 2 000 ans, la probabilité qu'il ne se désintègre pas au bout de 3000 ans est : $P_{(T>2000)}(T > 3000) = P(T > 1000)$, soit la probabilité qu'il ne se désintègre pas au bout de 1000.

4) Espérance

a) Espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $I = [a ; +\infty[$

DÉFINITION

Soit X une variable aléatoire à densité f sur $I = [a ; +\infty[$. Alors $E(X) = \lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. Alors $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.

DÉMONSTRATION

Calculons $\displaystyle\int_a^x t\lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$: soit ϕ la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par $\phi(t) = te^{-\lambda t}$.
ϕ est dérivable sur I et pour tout t de I, $\phi'(t) = e^{-\lambda t} - \lambda te^{-\lambda t}$. Donc $\lambda te^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - \phi'(t)$.
Ainsi, les fonctions $t \mapsto \lambda te^{-\lambda t}$ et $t \mapsto e^{-\lambda t} - \phi'(t)$ admettent une même primitive sur I.
Or une primitive de $t \mapsto e^{-\lambda t} - \phi'(t)$ sur I est $t \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - \phi(t)$ soit $t \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - te^{-\lambda t}$.
Donc $\displaystyle\int_0^x \lambda te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t} - te^{-\lambda t}\right]_0^x = \int_0^x \lambda te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} - xe^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}$.
Or $\lambda > 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\lambda x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\lambda x} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \lambda te^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$.