Terminale Maths Complémentaires – Thème 09

# TEMPS D'ATTENTE

Activité d'introduction à la notion de variable aléatoire **continue**

## Introduction et rappel :

Expérience aléatoire : expérience où on n'est pas sûr du résultat.
Univers $\Omega$ : l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire.
Variable aléatoire : réel obtenu lors d'une expérience aléatoire.

**Exemple 1 :**
On lance 2 dés à 6 faces.
Soit $X$ la variable aléatoire qui indique la somme obtenue avec les 2 dés.
Les valeurs possibles de $X$ sont tous les entiers compris entre $2$ et $12$, soit $\{2\,;3\,;4\,;...;\,12\}$.

$X$ prend un nombre fini de valeurs $\Rightarrow$ $X$ est une variable aléatoire discrète.

**Exemple 2 :**
Un élève arrive au lycée n'importe quand entre 8 et 9 heures du matin.
Soit $X$ la variable aléatoire qui indique l'heure d'arrivée de l'élève.
Les valeurs possibles de $X$, en heure, sont tous les réels compris entre $8$ et $9$. Il y en a une infinité.

$X$ prend un nombre infini de valeurs $\Rightarrow$ $X$ est une variable aléatoire continue.

*Jusqu'à maintenant, toutes les variables aléatoires rencontrées étaient des* ***variables aléatoires discrètes****. Vous savez déjà calculer des probabilités pour une variable aléatoire discrète, et dresser sa loi de probabilité : soit à partir d'un tableau comme ci-dessous (vu en 1ère) :*

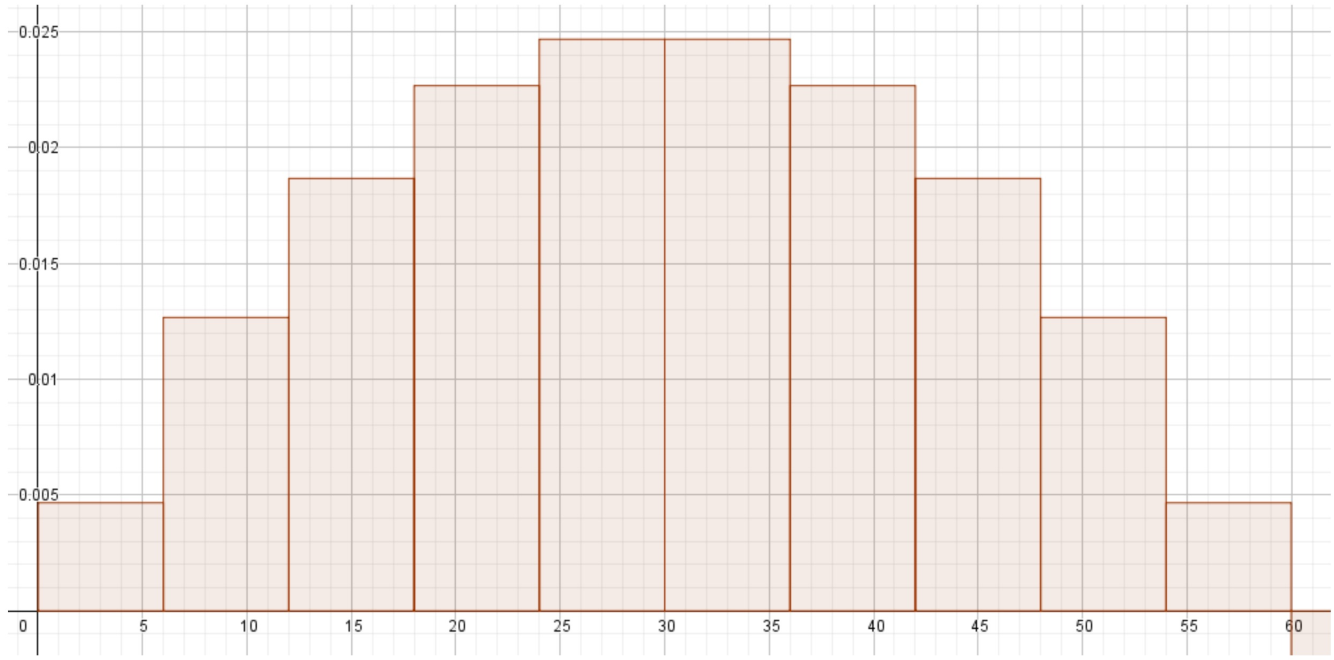
| Valeurs de $X$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_n$ |

*Soit à partir d'une formule, comme la loi uniforme discrète (un lancé de dé équilibré), ou encore la fameuse loi binomiale et sa belle formule toute faite.*
*Mais comment calculer des probabilités pour une variable aléatoire continue, qui prend une* ***infinité*** *de valeurs ? C'est ce que nous allons voir dans l'exercice qui suit en page suivante :*

## Exercice 1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue

### I) Première étude

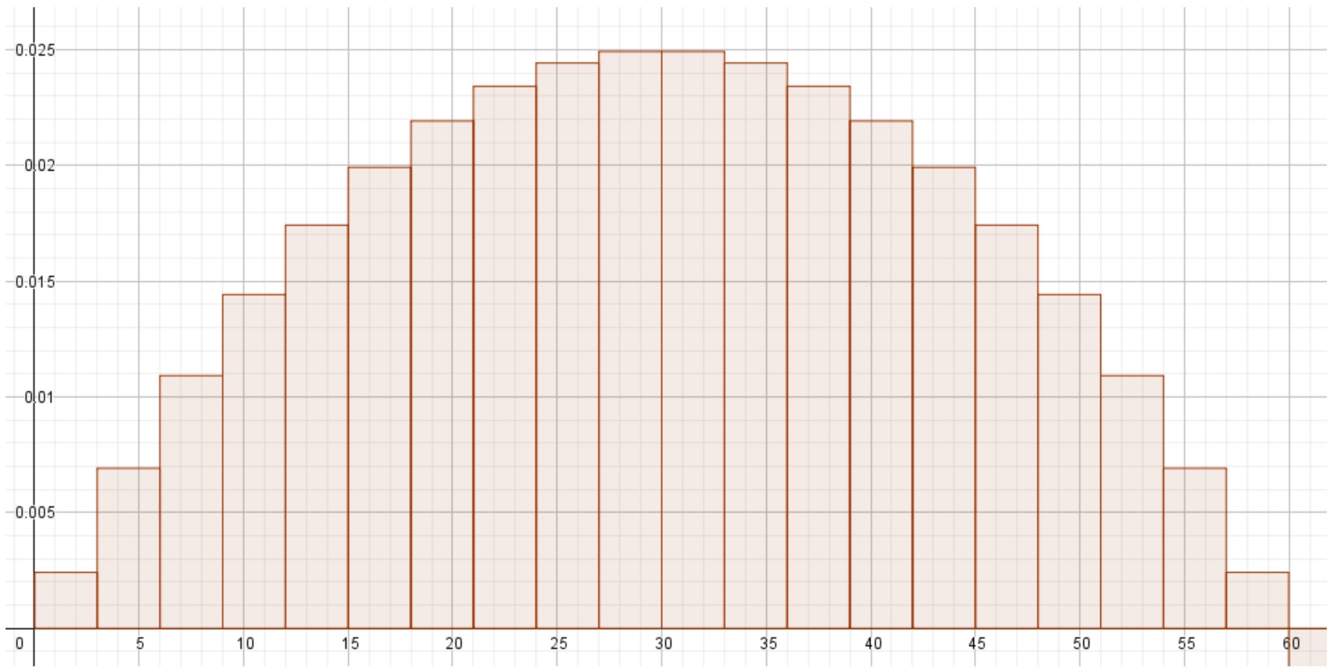
Soit $X$ la variable aléatoire correspondant au temps de trajet des élèves du lycée, ce temps de trajet étant compris entre 0 et 1 heure (60 minutes). $X$ **est donc ici une variable aléatoire continue.** On a représenté ci-dessous l'histogramme obtenu après l'enquête réalisée auprès des élèves, en choisissant des intervalles d'amplitude 6 minutes. On rappelle que la fréquence d'une classe (et donc la probabilité que $X$ soit compris entre deux réels) est obtenue en calculant l'aire du rectangle correspondant.




1. Vérifier que la somme des aires des rectangles, qui est donc égale à la somme des probabilités de l'univers de cette expérience, est bien égale à 1 (approximativement)
2. Quelle est la probabilité que le trajet d'un élève pris au hasard soit compris entre 0 et 6 minutes ?
3. Quelle est la probabilité que le trajet d'un élève pris au hasard soit compris entre 24 et 36 minutes ?

### II) Étude plus précise

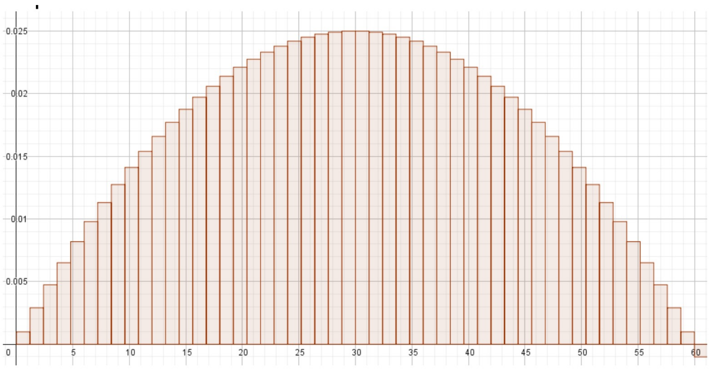
On a représenté ci-dessous l'histogramme obtenu après l'enquête réalisée auprès des élèves, en choisissant des intervalles d'amplitude 3 minutes (précision multipliée par 2).



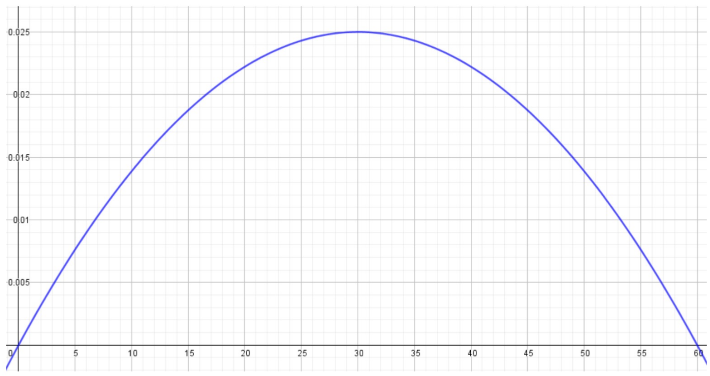
1. Vérifier que la somme des probabilités est bien égale à 1 (approximativement).
2. Quelle est la probabilité que le trajet d'un élève pris au hasard soit compris entre 12 et 15 minutes ?
3. Quelle est la probabilité que le trajet d'un élève pris au hasard soit compris entre 42 et 51 minutes ?
4. Quelle est la probabilité qu'un élève pris au hasard ait un trajet de moins de 21 minutes ?

## III) De plus en plus précis ...

On voit bien que cette étude atteint rapidement ses limites si l'on souhaite des résultats plus précis, on doit augmenter la précision :



et l'on imagine une courbe venant lisser cet histogramme. Cette courbe est celle d'une fonction $f$ appelée **densité de probabilité** de la variable aléatoire $X$. On peut l'interpréter comme le prolongement de l'histogramme avec une largeur des rectangles infiniment petite.



Ainsi, pour calculer la probabilité que $X$ soit compris entre deux réels $a$ et $b$, il faut déterminer l'aire sous la courbe de $f$ sur l'intervalle $[a\,;b]$. La fonction $f$ étant nécessairement positive et continue (puisqu'elle lisse un histogramme de probabilités), il suffit alors de calculer l'intégrale de cette fonction $f$ sur l'intervalle $[a\,;b]$.

1. Exprimer à l'aide d'une intégrale et de $f$ la probabilité qu'un élève ait un trajet compris entre un temps $t_1$ et un temps $t_2$ ($t_1$ et $t_2$ des nombres compris entre 0 et 60 et tels que $t_1 < t_2$).
2. Comment écrire alors la probabilité qu'un élève pris au hasard ait un trajet d'une durée exactement égale à 20 minutes ? Combien vaut alors cette probabilité ?
3. Que peut-on conclure alors sur la probabilité qu'un élève ait un trajet exactement égal à $t_0$, pour $t_0$ compris entre $0$ et $60$ ?
4. On donne maintenant l'expression de $f$, $\forall x \in [0\,;60]$, $f(x) = \dfrac{-1}{36000}(x^2 - 60x)$.
   Calculer la valeur exacte de $P(X < 21)$.
5. Conjecturer la valeur de l'aire, en u.a., du domaine sous la courbe sur $[0\,;60]$. Le démontrer.

## Exercice 2 Densité de probabilité

On a vu dans l'exercice précédent la notion de **densité de probabilité**. Voici sa définition :

**DÉFINITION**

Soit $I$ un intervalle (borné ou non) de $\mathbb{R}$.
On appelle **densité de probabilité sur** $I$ toute fonction $f$ définie sur $I$ telle que :

- $f$ est continue sur $I$.
- $f$ est positive sur $I$.
- L'aire sous la courbe de $f$ sur $I$ est égale à $1$ u.a.

Ainsi, pour vérifier qu'une fonction donnée est bien une densité de probabilité sur un intervalle fixé, il faut vérifier les trois conditions ci-dessus. A vous de jouer :

1. Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{2}$.
   (a) Tracer la courbe de $f$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.
   (b) Justifier que $f$ est bien une densité de probabilité sur $[0\,;1]$.

2. Soit $g$ la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par $g(x) = \dfrac{1}{4}$.
   (a) Tracer la courbe de $g$ sur l'intervalle $[-2\,;2]$.
   (b) Justifier que $g$ est bien une densité de probabilité sur $[-2\,;2]$.

3. Soit $h$ la fonction définie sur $[1\,;\mathrm{e}]$ par $h(x) = \dfrac{1}{x}$.
   (a) Tracer la courbe de $h$ sur l'intervalle $[1\,;\mathrm{e}]$.
   (b) Justifier que $h$ est bien une densité de probabilité sur $[1\,;\mathrm{e}]$.