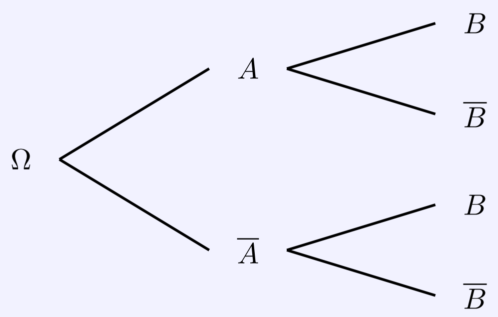
Terminale -Maths Complémentaires – Thème 07

# INFÉRENCE BAYÉSIENNE




## Table des matières



**inférence**
*nom féminin*
Opération logique par laquelle on admet une proposition, en vertu de sa liaison avec d'autres propositions déjà tenues pour vraies. (Synonyme : *induction*)

**inférence bayésienne**
L'inférence bayésienne est une méthode d'inférence par laquelle on calcule les probabilités de diverses causes hypothétiques à partir de l'observation d'événements connus. Elle s'appuie principalement sur le théorème de Bayes.

# I Retour sur les probabilités

## 1) Quelques rappels

**PROPRIÉTÉ** admise

Soient $A$ et $B$ deux événements. Alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

**DÉFINITION**

Deux événements $A$ et $B$ sont **incompatibles** $\iff A \cap B = \varnothing \iff P(A \cap B) = 0$.

## 2) Probabilité conditionnelle et probabilité d'intersection

**DÉFINITION**

Soient $A$ et $B$ deux événements relatifs à un univers $\Omega$, $B$ étant de probabilité non nulle.
La probabilité conditionnelle de $A$ sachant que $B$ est réalisé est le nombre réel noté $P_B(A)$ défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

**PROPRIÉTÉ** admise

Soient $A$ et $B$ deux événements relatifs à un univers $\Omega$ et de probabilités non nulles.
Alors $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ et $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$

## 3) Probabilités totales

**DÉFINITION**

Soit $\Omega$ un univers et soient $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ $n$ événements de probabilités non nulles, **deux à deux incompatibles**, et tels que leur réunion est $\Omega$.
On dit alors que les événements $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ forment une **partition de l'univers** $\Omega$.
(*Faire un schéma*)

**PROPRIÉTÉ** admise

On reprend les données de la définition précédente. Soit également $E$ un événement relatif à cet univers.
Alors la formule des probabilités totales s'écrit :

$$P(E) = P(E \cap A_1) + P(E \cap A_2) + ... + P(E \cap A_n)$$

### 4) Événements indépendants

**DÉFINITION**

Soient $A$ et $B$ deux événements.
On dit que $A$ et $B$ sont **indépendants** si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

**PROPRIÉTÉ** — admise

Si $A$ et $B$ sont deux événements indépendants **et de probabilités non nulles**, alors :

$$P_A(B) = P(B) \quad \text{et} \quad P_B(A) = P(A)$$

Autrement dit, si deux événements sont indépendants, alors la réalisation de l'un **ne dépend pas** de la réalisation de l'autre.

**PROPRIÉTÉ** — admise

Si $A$ et $B$ sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et $B$ sont aussi indépendants.

# II Inversement du conditionnement

### 1) La formule de Bayes

**PROPRIÉTÉ**

Soient $A$ et $B$ deux événements d'un même univers $\Omega$, et de probabilités non nulles. Alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

**DÉMONSTRATION**

D'après la définition des probabilités conditionnelles, puisque $A$ et $B$ sont de probabilités non nulles, on a $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$.

**EXEMPLE**

On considère les événements $N$ et $G$ d'un univers $\Omega$ tel que $P(N) = P(\overline{N}) = 0{,}5$ ; $P_N(G) = 0{,}1$ et $P_{\overline{N}}(G) = 0{,}2$.

1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité de l'événement $G$.
3. En déduire la probabilité de l'événement $\overline{N}$ sachant que l'événement $G$ est réalisé.

## 2) Conséquence de la formule de Bayes

**PROPRIÉTÉ**

Soit $n$ un entier naturel non nul, soient $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_n$ une partition de l'univers $\Omega$ et soit $B$ un événement de probabilité non nulle.

Alors pour tout entier naturel $i$ compris entre 1 et $n$, on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(A_1) \times P_{A_1}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$$

**DÉMONSTRATION**

La démonstration est immédiate à l'aide de la formule des probabilités totales appliquée à $P(B)$, puisque les événements $A_i$ partitionnent l'univers $\Omega$.

**PROPRIÉTÉ**

**Cas particulier :**
Soient $A$ et $B$ deux événements d'un même univers $\Omega$ et de probabilités non nulles, et avec $P(A) \neq 1$. Alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)}$$

**DÉMONSTRATION**

Les événements $A$ et $\overline{A}$ sont contraires et donc forment bien une partition de l'univers $\Omega$, donc il reste à appliquer la propriété précédente pour obtenir le résultat attendu.