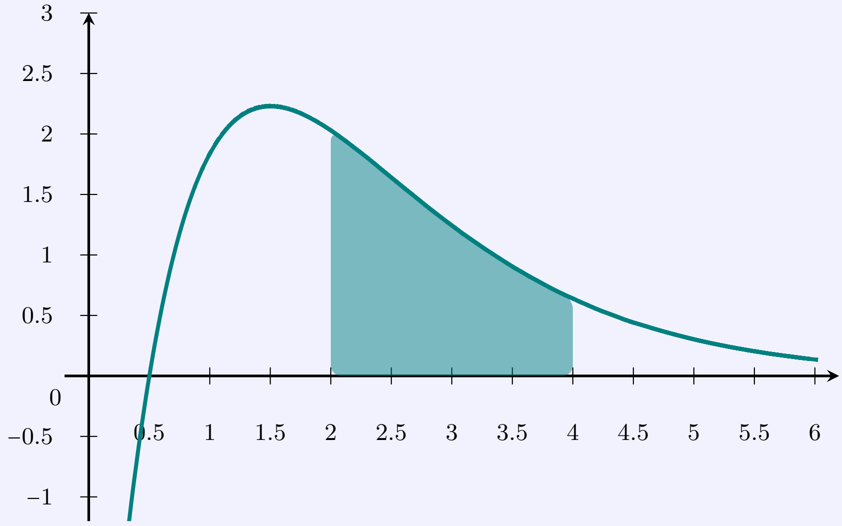
Terminale -Maths Complémentaires – Thème 05

# CALCULS D'AIRES




## Table des matières

# I Intégrale d'une fonction continue et positive

## 1) Définitions

**DÉFINITION**

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ du plan, on appelle unité d'aire, notée u.a., l'aire du rectangle de côté OI et OJ. *(Faire une figure)*

**DÉFINITION**

Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$, avec $a$ et $b$ des réels tels que $a < b$, et soit $C$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On appelle aire sous la courbe $C$ l'aire, en u.a., du domaine délimité par $C$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. *(Faire une figure)*

**DÉFINITION**

**Intégrale d'une fonction continue et positive :**
Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a$ et $b$ des réels tels que $a < b$, et soit $C$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On appelle intégrale de $a$ à $b$ de la fonction $f$ l'aire, en u.a., sous la courbe $C$ sur $[a\,;b]$.
On la note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (« intégrale de $a$ à $b$ de $f(x)\mathrm{d}x$ » ou « somme... »)

**REMARQUE**

- La variable $x$ est dite muette, car elle n'intervient pas dans le résultat. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$
- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

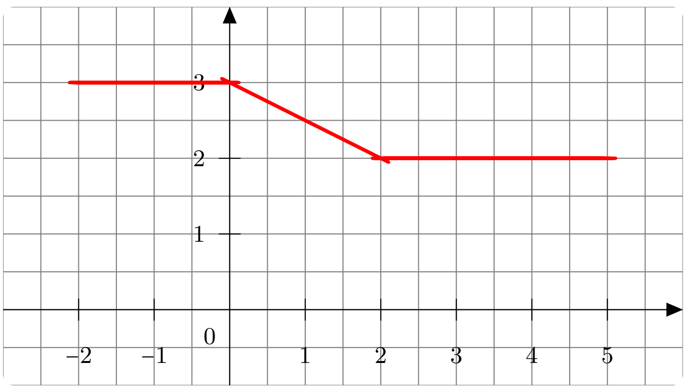
## 2) Premiers calculs d'intégrales

**EXERCICE**

En s'aidant d'un graphique, calculer les intégrales suivantes : $\int_2^5 4\,\mathrm{d}x$ $\quad\int_0^3 2x\,\mathrm{d}x$ $\quad\int_0^4 (x+1)\,\mathrm{d}x$

**EXEMPLE**

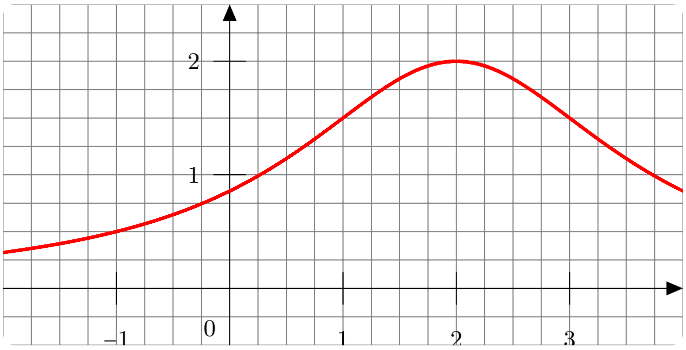
On a représenté la courbe de la fonction $f$ sur $[-2\,;5]$. A l'aide du graphique, calculer $\int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.



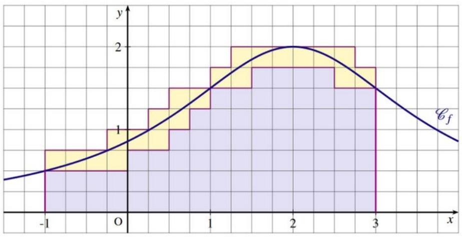
## EXEMPLE

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ par $f(x) = \dfrac{6}{x^2 - 4x + 7}$ dont la courbe $C$ est représentée ci-dessous.

Donner un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

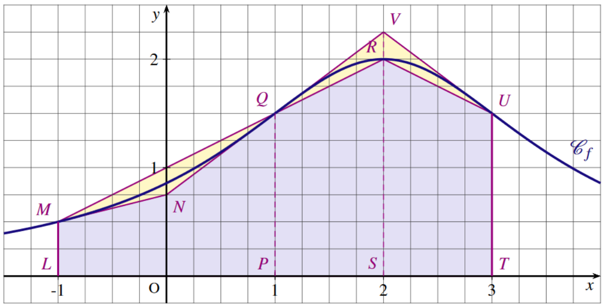



**Correction :**




Sur l'intervalle $[-1;3]$, la fonction $f$ est continue et positive. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$.
On peut déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du quadrillage. D'où l'encadrement :

$$\frac{75}{16} \leqslant \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 6$$




Un encadrement plus précis est obtenu à partir de trapèzes. Les droites $(MN)$, $(NV)$ et $(VU)$ étant les tangentes respectives à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses $-1$, $1$ et $3$.
L'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ est comprise entre la somme des aires des trapèzes $LMNO$, $NOPQ$, $PQRS$ et $RSTU$ et, la somme des aires des trapèzes $LMPQ$, $PQVS$ et $VSTU$. Soit

$$0{,}625+1{,}25+1{,}75+1{,}75 \leqslant \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2+1{,}875++1{,}875$$

$$\iff 5{,}375 \leqslant \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 5{,}75$$

## REMARQUES

— À l'aide de la calculatrice, on trouve $\displaystyle\int_{-1}^{3} \left(\frac{6}{x^2 - 4x + 7}\right)\mathrm{d}x \approx 5{,}44$ u.a.

— À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{3} \left(\frac{6}{x^2 - 4x + 7}\right)\mathrm{d}x = \pi\sqrt{3}$ u.a.

**Problématique :**
Comment déterminer la valeur exacte d'une intégrale ?

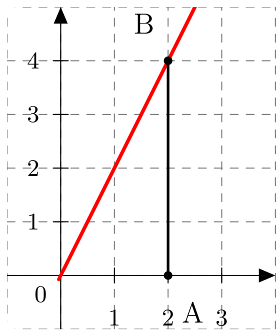
# II Calcul d'intégrales

## 1) Fonction aire

**THÉORÈME** admis

Soit $f$ une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
On appelle **fonction Aire** la fonction $F$ définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
$F$ est dérivable sur $[a\,;b]$ et sa dérivée est la fonction $f$. *(Faire une figure)*

**EXEMPLE**




Soit $f: x\mapsto 2x$ définie sur $[0\,;4]$. $f$ est continue et positive sur $[0\,;4]$.
$\forall x\in[0\,;4]$, $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire, en u.a., du triangle rectangle $OAB$, avec $A(x\,;0)$ et $B(x\,;2x)$.

On a alors $F(x)=\dfrac{OA\times AB}{2}=\dfrac{x\times 2x}{2}=x^2$ et on a bien $F'(x)=2x=f(x)$.

## 2) Primitives et intégrales

**DÉFINITION**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a$ et $b$ des réels et $a<b$.
L'intégrale de $a$ à $b$ de $f$ est le réel noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ égal à $F(b)-F(a)$, où $F$ est une primitive de $f$ sur $[a\,;b]$ :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

**REMARQUE**

Dans le cas où $f$ est continue et positive sur $[a\,;b]$, on retrouve la définition du I avec l'aire sous la courbe.

**EXEMPLE**

Calculer $A=\int_{-1}^{4}\left(\frac{1}{3}x-x^2\right)\mathrm{d}x$ et $B=\int_3^5 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

## 3) Propriétés des intégrales

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$.

**PROPRIÉTÉ** admise

**Linéarité :**
- $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\forall k\in\mathbb{R}$, $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

**PROPRIÉTÉ** admise

**Relation de Chasles :**
Pour tous réels $c$, $d$ et $e$ de l'intervalle $[a\,;b]$ :

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x + \int_e^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

**PROPRIÉTÉ**

**Propriétés algébriques :**
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

## DÉMONSTRATION

- évident, vu auparavant.
- Relation de Chasles.

**PROPRIÉTÉ**

**Positivité :**
- Si pour tout réel $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si pour tout réel $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

## DÉMONSTRATION

Ce résultat découle de la définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive.

**PROPRIÉTÉ**

**Ordre :**
Si pour tout réel $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

## DÉMONSTRATION

$f(x) \leqslant g(x) \Longleftrightarrow g(x) - f(x) \geqslant 0$ et on utilise la propriété précédente puis la linéarité de l'intégrale.

## 4) Aire délimitée par deux courbes

**PROPRIÉTÉ** **admise**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$ et telles que pour tout réel $x$ de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.
L'aire, en u.a., du domaine délimité par les courbes représentatives de $f$ et de $g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

*(Faire une figure)*

## 5) Valeur moyenne d'une fonction

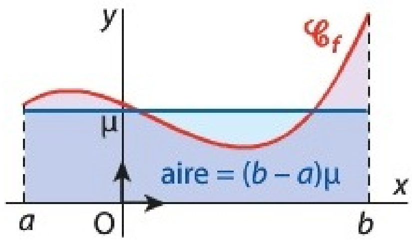
**DÉFINITION**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ (avec $a$ et $b$ des réels et $a < b$).
On appelle valeur moyenne de $f$ sur $[a\,;b]$ le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

**Interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive :**

La valeur moyenne $\mu$ est telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\mu$.
Ainsi, lorsque $f$ est positive sur $[a;b]$, le nombre $\mu$ peut être interprété comme la hauteur du rectangle construit sur $[a;b]$ et ayant la même aire que le domaine $D$ située sous la courbe $C_f$.



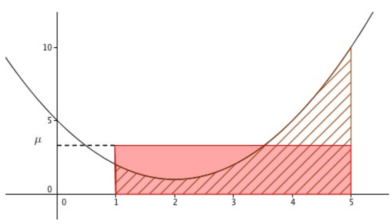

**EXEMPLE**

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 5$.

1. Calculer la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $[1;5]$.
2. Tracer $C_f$ sur $[1;5]$ et interpréter graphiquement.

**Correction :**

1. $\mu = \dfrac{1}{5-1}\displaystyle\int_1^5 (x^2 - 4x + 5)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_1^5 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{50}{3} - \dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{10}{3}$.
2. $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ donc $C_f$ est une parabole de sommet $(2;1)$ :




L'aire sous la courbe est égale à l'aire du rectangle rouge.