Terminale -Maths Complémentaires – Thème 05

CALCULS D'AIRES

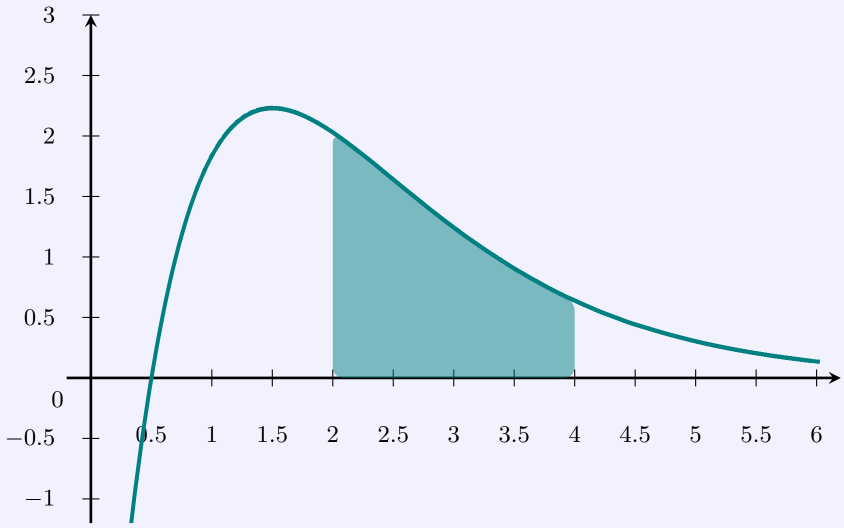


Table des matières

I Intégrale d'une fonction continue et positive

1) Définitions

DÉFINITION

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$ du plan, on appelle unité d'aire, notée u.a., l'aire du rectangle de côté OI et OJ. *(Faire une figure)*

DÉFINITION

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$, avec a et b des réels tels que $a < b$, et soit C sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On appelle aire sous la courbe C l'aire, en u.a., du domaine délimité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. *(Faire une figure)*

DÉFINITION

Intégrale d'une fonction continue et positive :
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ avec a et b des réels tels que $a < b$, et soit C sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On appelle intégrale de a à b de la fonction f l'aire, en u.a., sous la courbe C sur $[a\,;b]$.

On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (« intégrale de a à b de $f(x)\mathrm{d}x$ » ou « somme... »)

REMARQUE

- La variable x est dite muette, car elle n'intervient pas dans le résultat. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

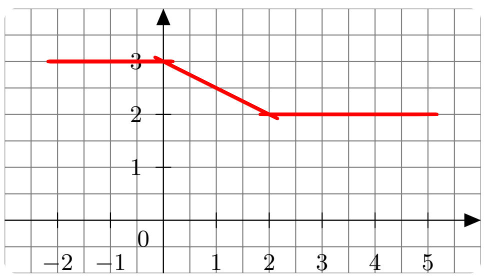
2) Premiers calculs d'intégrales

EXERCICE

En s'aidant d'un graphique, calculer les intégrales suivantes : $\displaystyle\int_2^5 4\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^3 2x\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^4 (x+1)\,\mathrm{d}x$

EXEMPLE

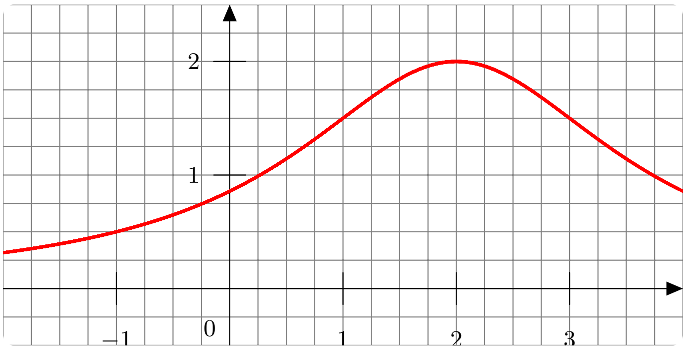
On a représenté la courbe de la fonction f sur $[-2\,;5]$. A l'aide du graphique, calculer $\displaystyle\int_{-2}^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.



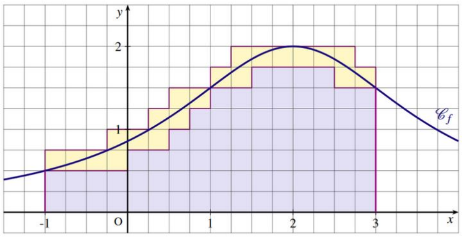
EXEMPLE

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \dfrac{6}{x^2 - 4x + 7}$ dont la courbe C est représentée ci-dessous.

Donner un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

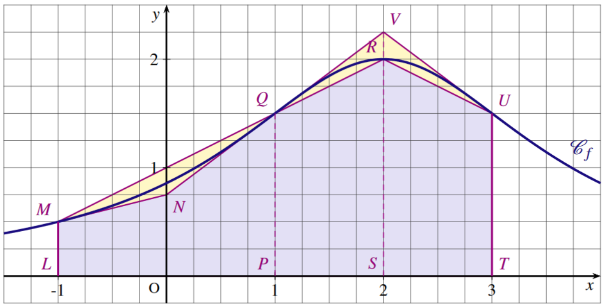


Correction :



Sur l'intervalle $[-1;3]$, la fonction f est continue et positive. L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$.
On peut déterminer un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ à l'aide du quadrillage. D'où l'encadrement :

$$\frac{75}{16} \leqslant \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 6$$



Un encadrement plus précis est obtenu à partir de trapèzes. Les droites (MN), (NV) et (VU) étant les tangentes respectives à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -1, 1 et 3.
L'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ est comprise entre la somme des aires des trapèzes $LMNO$, $NOPQ$, $PQRS$ et $RSTU$ et, la somme des aires des trapèzes $LMPQ$, $PQVS$ et $VSTU$. Soit

$$0,625+1,25+1,75+1,75 \leqslant \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2+1,875+1,875$$

$$\iff 5,375 \leqslant \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 5,75$$

REMARQUES

— À l'aide de la calculatrice, on trouve $\displaystyle\int_{-1}^{3} \left(\frac{6}{x^2 - 4x + 7}\right) \mathrm{d}x \approx 5,44$ u.a.

— À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $\displaystyle\int_{-1}^{3} \left(\frac{6}{x^2 - 4x + 7}\right) \mathrm{d}x = \pi\sqrt{3}$ u.a.

Problématique :
Comment déterminer la valeur exacte d'une intégrale ?

II Calcul d'intégrales

1) Fonction aire

DÉFINITION

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

On appelle **fonction Aire** la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(Faire une figure)

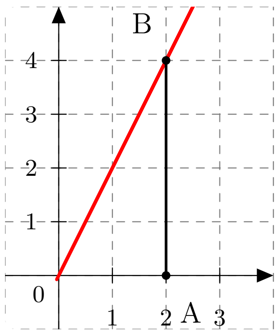
REMARQUE

En particulier, $F(a)=\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$ et $F(b)=\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

THÉORÈME — admis

La fonction F définie ci-dessus est dérivable sur $[a\,;b]$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=f(x)$.

EXEMPLE



Soit $f : x\mapsto 2x$ définie sur $[0\,;4]$. f est continue et positive sur $[0\,;4]$.

$\forall x\in[0\,;4]$, $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'aire, en u.a., du triangle rectangle OAB, avec $A(x\,;0)$ et $B(x\,;2x)$.

On a alors $F(x)=\dfrac{OA\times AB}{2}=\dfrac{x\times 2x}{2}=x^2$ et on a bien $F'(x)=2x=f(x)$.

2) Primitives et intégrales

DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec a et b des réels et $a<b$.

L'intégrale de a à b de f est le réel noté $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ égal à $F(b)-F(a)$, où F est une primitive de f sur $[a\,;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

REMARQUE

Dans le cas où f est continue et positive sur $[a\,;b]$, on retrouve la définition du I avec l'aire sous la courbe.

EXEMPLE

Calculer $A=\displaystyle\int_{-1}^4\left(\frac{1}{3}x-x^2\right)\,\mathrm{d}x$ et $B=\displaystyle\int_3^5 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

3) Propriétés des intégrales

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$.

PROPRIÉTÉ admise

Linéarité :

- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
- $\forall k \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

PROPRIÉTÉ admise

Relation de Chasles :

Pour tous réels c, d et e de l'intervalle $[a\,;b]$:

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x + \int_e^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

PROPRIÉTÉ

Propriétés algébriques :

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

DÉMONSTRATION

- évident, vu auparavant.
- Relation de Chasles.

PROPRIÉTÉ

Positivité :

- Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.

DÉMONSTRATION

Ce résultat découle de la définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive.

PROPRIÉTÉ

Ordre :

Si pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

DÉMONSTRATION

$f(x) \leqslant g(x) \Longleftrightarrow g(x) - f(x) \geqslant 0$ et on utilise la propriété précédente puis la linéarité de l'intégrale.

4) Aire délimitée par deux courbes

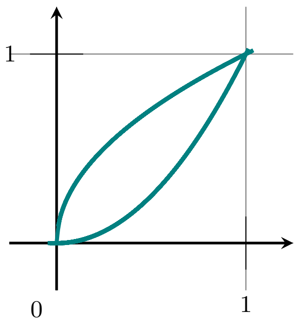
PROPRIÉTÉ **admise**

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$ et telles que pour tout réel x de $[a\,;b]$, $f(x) \leqslant g(x)$.
L'aire, en u.a., du domaine délimité par les courbes représentatives de f et de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à :

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

(Faire une figure)

EXEMPLE



Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Soit g la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = x^2$.

1. Justifier brièvement que les fonctions f et g sont continues et positives sur $[0\,;1]$, puis que pour tout $x \in [0\,;1]$, $f(x) \geqslant g(x)$.
2. Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;1]$ par $F(x) = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de f sur $[0\,;1]$.
3. Calculer l'aire, en ua, entre les courbes de f et de g sur $[0\,;1]$.

5) Valeur moyenne d'une fonction

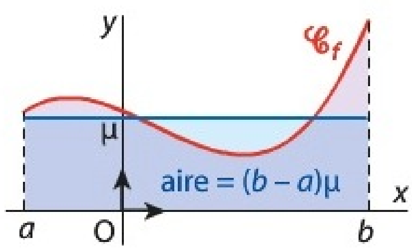
DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ (avec a et b des réels et $a < b$).
On appelle valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ le réel :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive :

La valeur moyenne μ est telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\mu$.
Ainsi, lorsque f est positive sur $[a;b]$, le nombre μ peut être interprété comme la hauteur du rectangle construit sur $[a;b]$ et ayant la même aire que le domaine D située sous la courbe C_f.



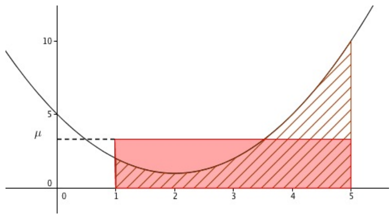
EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 5$.

1. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1; 5]$.
2. Tracer C_f sur $[1; 5]$ et interpréter graphiquement.

Correction :

1. $\mu = \dfrac{1}{5-1}\displaystyle\int_1^5 (x^2 - 4x + 5)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x\right]_1^5 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{50}{3} - \dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{10}{3}$.
2. $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ donc C_f est une parabole de sommet $(2; 1)$:



L'aire sous la courbe est égale à l'aire du rectangle rouge.