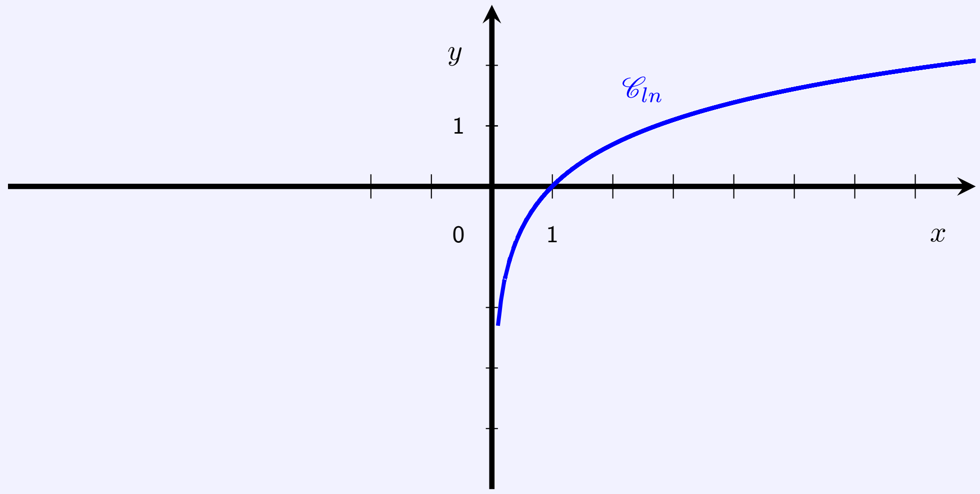
Terminale -Maths Complémentaires – Thème 04

# APPROCHE HISTORIQUE DE LA FONCTION LN



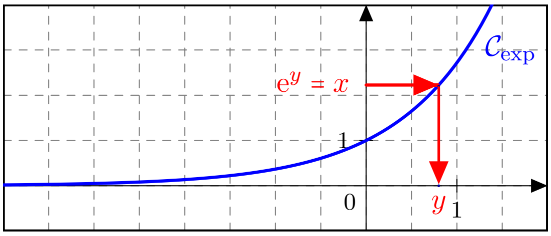

## Table des matières

# I La fonction logarithme népérien

## 1) Théorème et définition

**THÉORÈME**

Pour tout réel $x > 0$, il existe un unique réel $y$ tel que $e^y = x$.




**DÉMONSTRATION**

- La fonction exponentielle est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Donc d'après le corollaire du TVI, pour tout $x \in ]0;+\infty[$, il existe un unique réel $y$ tel que $e^y = x$.

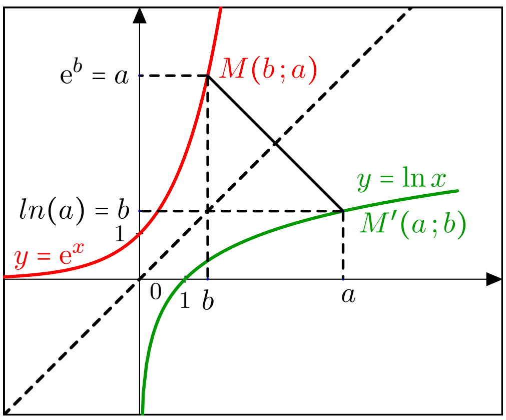
**DÉFINITION**

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui à tout réel $x > 0$ associe l'unique réel donc l'exponentielle est $x$.
On dit que la fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exp sur $\mathbb{R}_+^*$.

## 2) Conséquences immédiates

**PROPRIÉTÉS** admises

- $\forall a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$. En particulier, $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln e^x = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln x} = x$.
- Les fonctions exp et ln étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



## 3) La relation fonctionnelle

### a La relation

**PROPRIÉTÉ**

Soient $x$ et $y$ deux réels strictement positifs. Alors $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

**DÉMONSTRATION**

$\forall x,y \in ]0\,;+\infty[$, $\ln(xy) = \ln(\mathrm{e}^{\ln x} \times \mathrm{e}^{\ln y})$ d'après la propriété précédente.
$= \ln\left(\mathrm{e}^{\ln x + \ln y}\right)$ d'après la relation fonctionnelle de la fonction exp.
$= \ln(x) + \ln(y)$ d'après la propriété précédente.

**REMARQUE**

Si $x < 0$ et $y < 0$, alors $\ln(xy)$ existe, mais $\ln x$ et $\ln y$ n'existent pas : on a alors $\ln(xy) = \ln(-x) + \ln(-y)$.

**EXEMPLE**

$\ln 12 = \ln(3 \times 2 \times 2) = \ln 3 + 2\ln 2$.

### b Conséquences

**PROPRIÉTÉ**

Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs.

1. $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$.
2. $\ln \dfrac{1}{b} = -\ln b$.
3. Pour tous nombres strictement positifs $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ : $\ln(a_1 \times a_2 \times ... \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + ... + \ln a_n$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln a^n = n \ln a$.
5. $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$.

**DÉMONSTRATION**

1. $\ln a = \ln\left(\dfrac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) + \ln b$, d'où $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.
2. En prenant $a = 1$, on a alors $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = \ln 1 - \ln b = 0 - \ln b = -\ln b$.
3. Démonstration par récurrence (programme de Spé Maths).
4. Pour $n \geqslant 2$, cela résulte de la proposition précédente en posant $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$.
   Pour $n = 1$ et $n = 0$, cela résulte de $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.
   Pour $n < 0$, $\ln a^n = \ln\left(\dfrac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n\ln a)) = n \ln a$ (car $-n > 0$).
5. $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$ donc $\ln a = \ln\sqrt{a} + \ln\sqrt{a} = 2\ln\sqrt{a}$ d'où $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$.

**EXEMPLE**

Simplifier $A = \ln(4^{-3}) + 5\ln 2$ et $B = \ln\sqrt{3} + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$. (*Correction :* $A = -\ln 2$ et $B = \dfrac{1}{2}\ln 5$)

# II Étude de la fonction logarithme népérien

## 1) Dérivée

**PROPRIÉTÉ**

La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

**DÉMONSTRATION**

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^{\ln x}$.
$f$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ , de dérivée $f'(x) = \ln' x \times e^{\ln x} = x \ln' x$.
Or $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $f(x) = x$, donc $f'(x) = 1$ sur $]0\,;+\infty[$ .
Donc $\forall x \in ]0\,;+\infty[$, $x \ln' x = 1$ d'où $\ln' x = \dfrac{1}{x}$.

## 2) Sens de variation et signe

**PROPRIÉTÉ**

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

**DÉMONSTRATION**

$\forall x \in ]0;+\infty[$, $\ln' x = \dfrac{1}{x} > 0$ donc ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

**PROPRIÉTÉ**

La fonction ln est strictement négative sur $]0;1[$, nulle en 1, et strictement positive sur $]1;+\infty[$.

**DÉMONSTRATION**

ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\ln 1 = 0$ d'où le résultat.

## 3) Résolution d'équations et d'inéquations

**PROPRIÉTÉ** **admise**

**conséquence directe de la stricte monotonie de ln :**
Pour tous nombres $a$ et $b$ strictement positifs :

$$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \qquad \text{et} \qquad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$$

## EXEMPLES

- Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'équation $\ln x = -5$.
- Résoudre l'inéquation $\ln(1+x) \leqslant 100$ après avoir précisé sur quel intervalle cette inéquation a un sens.
- De même avec l'inéquation $\ln(x^2 - 4) \leqslant \ln x$.
- De même avec l'équation $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$.

## 4) Limites

**PROPRIÉTÉ** admise

$$\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$$

## 5) Convexité

**PROPRIÉTÉ**

La fonction ln est concave sur $]0\,;+\infty[$.

### DÉMONSTRATION

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$.

$f$ est deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et, pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, et donc $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

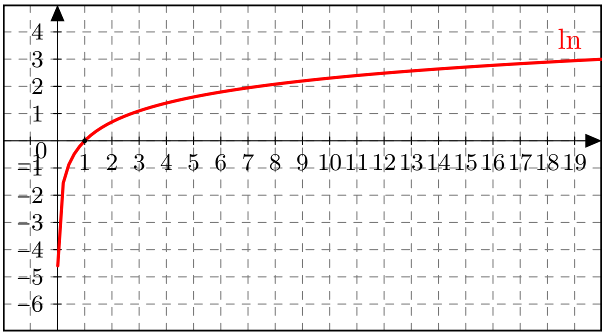
Ainsi, pour tout réel $x > 0$, $f''(x) < 0$, donc $f$ est concave sur $]0\,;+\infty[$.

## 6) Résumé

**Tableau de variation détaillé :**

| $x$ | $0$ | | $1$ | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $(\ln)'(x)$ | ‖ | | $+$ | | |
| $\ln$ | ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ $\nearrow$ | $1$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Courbe représentative :**




## 7) Dérivée de $x \mapsto \ln(u(x))$

**PROPRIÉTÉ** admise

Soit $u$ une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle $I$.

Alors la fonction $f$ définie par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.