

Terminale - Maths Complémentaires – Thème 03

ÉVOLUTIONS - MODÈLES CONTINUS

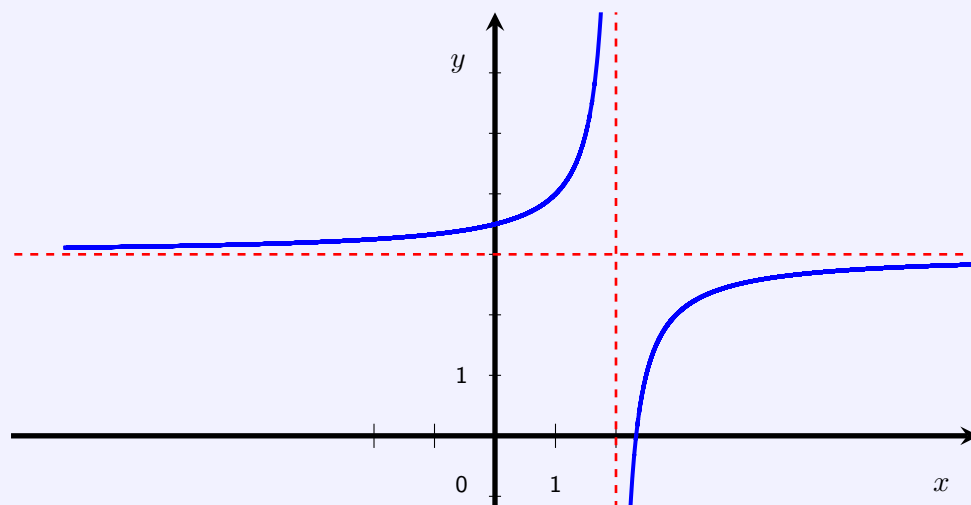


Table des matières

I	Limite d'une fonction	2
1)	Limite finie à l'infini	2
2)	Limite infinie à l'infini	2
3)	Limite en un nombre réel	3
4)	Limites de la fonction exponentielle	4
5)	Opérations sur les limites	4
6)	Limites et comparaison	4
II	Équations différentielles	5
1)	Notion d'équation différentielle	5
2)	Notion de primitives	6
3)	Calcul de primitives	6
4)	Équation différentielle $y' = ay$	7
5)	Équation différentielle $y' = ay + b$	7

I Limite d'une fonction

1) Limite finie à l'infini

DÉFINITION

• Soit l un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]A; +\infty[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

• Soit l un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]-\infty; A[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit.

On note : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

DÉFINITION

Soit f une fonction et l un réel.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$. (Même définition en $-\infty$)

PROPRIÉTÉ

admise

- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $+\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ et $x \mapsto e^x$ ont pour limite 0 en $-\infty$.

2) Limite infinie à l'infini

DÉFINITION

Soit f une fonction.

• On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• On définit de même $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

PROPRIÉTÉ

admise

- Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto e^x$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, n impair) ont pour limite $-\infty$ en $-\infty$.
- Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$, n pair), $x \mapsto |x|$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

3) Limite en un nombre réel

DÉFINITION

Soient f une fonction et a un réel.

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a .

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

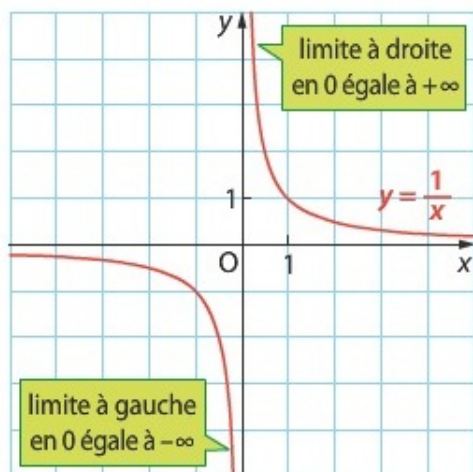
On définit de même $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

REMARQUE

Lorsqu'on étudie la limite de $f(x)$ quand x tend vers un réel a , il faut distinguer le cas où x tend vers a « par la gauche » du cas où x tend vers a « par la droite » (ce qui n'est bien sûr pas le cas lorsque x tend vers $+\infty$ (c'est nécessairement « par la gauche ») ou lorsque x tend vers $-\infty$ (c'est nécessairement « vers la droite »)).

EXEMPLE

Étudions la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0.



On remarque que l'on ne peut pas conclure directement sur la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 sans distinguer deux cas : x positif ou x négatif.

Cas où $x > 0$:

On dit que **la limite à droite en 0** de la fonction f est $+\infty$ et on le note $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

Cas où $x < 0$:

On dit que **la limite à gauche en 0** de la fonction f est $-\infty$ et on le note $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$.

DÉFINITION

Soient f une fonction et a un réel.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f .

REMARQUE

Ce résultat reste valable si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, ou si $\lim_{x < a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x > a} f(x) = +\infty$.

PROPRIÉTÉ

admise

- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ ont pour limite $+\infty$ en 0.
- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^3}$ ont pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures (« à gauche ») et $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures (« à droite »)

4) Limites de la fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

DÉMONSTRATION

Voir plus bas dans 6) **Théorème de comparaison**.

5) Opérations sur les limites

PROPRIÉTÉ

admise

Tableau des règles opératoires :

Les tableaux du chapitre « *Limites de suites* » sont à reprendre, en remplaçant les suites u et v par les fonctions f et g définies au voisinage d'un réel a ou de $+\infty$ ou $-\infty$.

EXERCICE

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-5}{x+2}$ et C_f sa courbe représentative.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à C_f .
- Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
- Tracer dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f ainsi que ses asymptotes.

EXERCICE

Déterminer les limites suivantes et en donner une interprétation graphique lorsque cela est possible :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2 - 5x + 1) \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 - 5x + 1) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\frac{1}{x} + 2 \right) (x^2 - 1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x+1}{x+2} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

6) Limites et comparaison

THÉORÈME

admis

Théorème de comparaison :

Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]A; +\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$) avec A un réel.

- Si pour tout x de I , $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout x de I , $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

REMARQUE

Ce théorème reste valable en $-\infty$, en un réel a , ou si l'inégalité n'est vérifiée qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

EXERCICE

Le but de cet exercice est de démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x - x$.

1. Déterminer le sens de variations de f sur \mathbb{R} puis dresser son tableau de variation (On ne demande pas les limites).
2. En déduire que pour tout réel x , $f(x) > 0$, puis que $e^x > x$.
3. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

THÉORÈME**admis**

Théorème des gendarmes :

Soient f , g et h trois fonctions définies sur $I =]A; +\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$), avec A un réel.

Soit l un réel.

Si pour tout x de I , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, et si g et h ont la même limite l en $+\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

REMARQUE

Ce théorème reste valable en $-\infty$, en un réel a ou si l'encadrement n'est vérifiée qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

EXERCICE

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que f a une limite en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer de même la limite de f en $-\infty$.

II Équations différentielles**1) Notion d'équation différentielle****DÉFINITION**

Une équation différentielle du premier ordre est une équation liant une fonction inconnue y , dérivable sur un intervalle I , et sa dérivée y' .

EXEMPLE

L'équation $(E) : y' = 2y$ est une équation différentielle d'inconnue une fonction y .

Résoudre cette équation, c'est trouver toutes les fonctions f définies et dérivables sur \mathbb{R} telles que, pour tout réel x , on ait $f'(x) = 2f(x)$.

EXERCICE

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$.

1. Justifier que les fonctions g et h , définies et dérivables sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = e^{2x+5}$ sont solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$.
2. Proposer une autre fonction solution de l'équation différentielle (E) .

2) Notion de primitives

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle **primitive de f** sur I toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Autrement dit, une primitive de f sur I est une fonction F , dérivable sur I , telle que pour tout réel x de I , $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLES

- Démontrer que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = (2x + 3)e^{1-3x}$ est une primitive de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (-6x - 7)e^{1-3x}$.
- Déterminer une primitive de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 3x^2 + 5x - 6$.

THÉORÈME

admis

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

THÉORÈME

admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I .

- f admet une infinité de primitives sur I .
- Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k un réel. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

3) Calcul de primitives

Fonction $f : x \mapsto \dots$	Une primitive $F : x \mapsto \dots$	Sur l'intervalle $I = \dots$
m (constante)	mx	\mathbb{R}
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x^n}$ (n entier, $n \geq 2$)	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	\mathbb{R}

Dans le tableau suivant, f et g sont deux fonctions de primitives respectives F et G , u désigne une fonction dérivable, à dérivée continue, sur un intervalle I :

Fonction f du type...	Une primitive F du type...	Conditions
$f + g$	$F + G$	
kf	kF	k réel
$u'e^u$	e^u	
$2u'u$	u^2	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$

EXERCICE

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto x^4 - 3x^3 - 5x^2 + \frac{7}{3}x - 2$ sur \mathbb{R} .
- $f : x \mapsto 2x - 4 + \frac{3}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.
- $f : x \mapsto x^2(x^3 - 1)^5$ sur \mathbb{R} .
- $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 4}$ sur $]2; +\infty[$.
- $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0; +\infty[$.

REMARQUE

Peut-on trouver facilement une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$?

4) Équation différentielle $y' = ay$ **PROPRIÉTÉ****admise**

Soit a un réel. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{ax}$, où k est une constante réelle.

REMARQUE

L'équation différentielle $y' = ay$ admet donc une infinité de solutions.

EXEMPLE

Résoudre l'équation différentielle $y' - 5y = 0$.

5) Équation différentielle $y' = ay + b$ **THÉORÈME****admis**

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

- L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique solution particulière constante de la forme $u : x \mapsto \alpha$, où α est un réel.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{ax} + \alpha$, où k est une constante réelle.

EXEMPLE

On veut résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = 3y + 2$.

• **Recherche d'une solution particulière constante :**

Soit u la fonction définie sur \mathbb{R} par $u(x) = \alpha$, où α est une constante réelle.

u solution de $(E) \iff \forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 3u(x) + 2$.

Or pour tout réel x , $u'(x) = 0$ (puisque u est une fonction constante), donc on a $0 = 3u(x) + 2$, soit finalement

$$u(x) = -\frac{2}{3}.$$

• **Conclusion :**

Ainsi, d'après le théorème, les solutions de (E) sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = k e^{3x} - \frac{2}{3}, \text{ où } k \text{ est une constante réelle.}$$

EXERCICE

Soit E l'équation différentielle $(E) : 5y' + 3y = -1$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) .
2. Etude des fonctions solutions f_k :
 - (a) Tracer à la calculatrice les courbes de quelques solutions f_k de (E) pour des valeurs positives, négatives, décimales etc de k .
 - (b) Conjecturer graphiquement et en fonction de k les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f_k , ainsi que leurs sens de variations.
 - (c) Démontrer ces conjectures.
3. Déterminer l'unique solution g de E vérifiant $g(0) = 3$.

REMARQUE

Il est possible à la calculatrice de résoudre une équation différentielle avec ou sans condition :

$$\text{deSolve}(5y'+3y=-1,x,y) \quad \text{ou} \quad \text{deSolve}(5y'+3y=-1 \text{ and } y(0)=3,x,y)$$