Terminale -Maths Complémentaires – Thème 03

ÉVOLUTIONS - MODÈLES CONTINUS

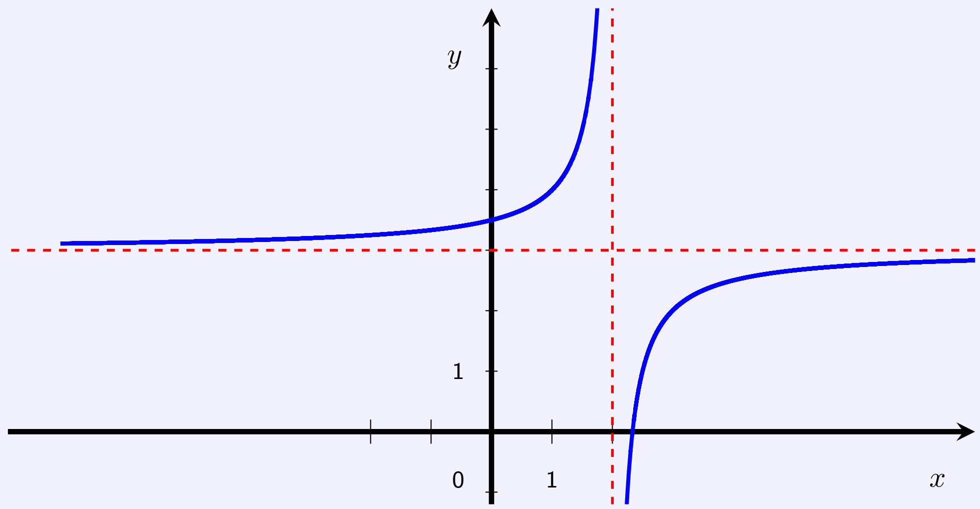


Table des matières

I Limite d'une fonction

1) Limite finie à l'infini

DÉFINITION

• Soit l un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]A\,;+\infty[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

• Soit l un réel et f une fonction définie sur intervalle $I =]-\infty\,;A[$, avec A un réel, ou $I = \mathbb{R}$.
On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez petit.
On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$.

DÉFINITION

Soit f une fonction et l un réel.
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, alors on dit que la droite d'équation $y = l$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$. (*Même définition en* $-\infty$)

PROPRIÉTÉ admise

• Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite 0 en $+\infty$.

• Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^x$ ont pour limite 0 en $-\infty$.

2) Limite infinie à l'infini

DÉFINITION

Soit f une fonction.

• On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• On définit de même $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

PROPRIÉTÉ admise

• Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
• Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*$, n impair$)$ ont pour limite $-\infty$ en $-\infty$.
• Les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*$, n pair$)$, $x \mapsto |x|$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

3) Limite en un nombre réel

DÉFINITION

Soient f une fonction et a un réel.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.
On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

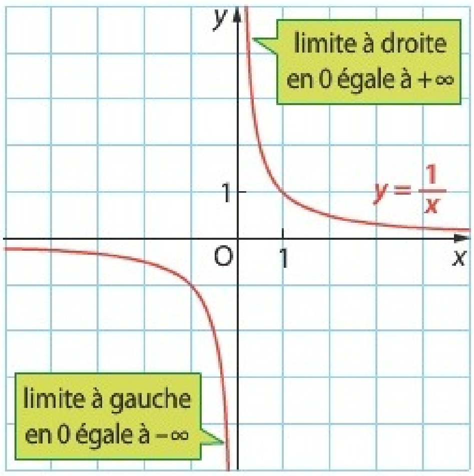
On définit de même $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

REMARQUE

Lorsqu'on étudie la limite de $f(x)$ quand x tend vers un réel a, il faut distinguer le cas où x tend vers a « par la gauche » du cas où x tend vers a « par la droite » (ce qui n'est bien sûr pas le cas lorsque x tend vers $+\infty$ (c'est nécessairement « par la gauche ») ou lorsque x tend vers $-\infty$ (c'est nécessairement « vers la droite »)).

EXEMPLE

Étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0.



On remarque que l'on ne peut pas conclure directement sur la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 sans distinguer deux cas : x positif ou x négatif.

Cas où $x > 0$:
On dit que **la limite à droite en 0** de la fonction f est $+\infty$ et on le note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

Cas où $x < 0$:
On dit que **la limite à gauche en 0** de la fonction f est $-\infty$ et on le note $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -\infty$.

DÉFINITION

Soient f une fonction et a un réel.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe de f.

REMARQUE

Ce résultat reste valable si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$, ou si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$.

PROPRIÉTÉ admise

- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$ ont pour limite $+\infty$ en 0.
- Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ ont pour limite $-\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures (« à gauche ») et $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures (« à droite »)

4) Limites de la fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x \mapsto +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \mapsto -\infty} e^x = 0$$

DÉMONSTRATION

Voir plus bas dans **6) Théorème de comparaison**.

5) Opérations sur les limites

PROPRIÉTÉ — admise

Tableau des règles opératoires :
Les tableaux du chapitre « *Limites de suites* » sont à reprendre, en remplaçant les suites u et v par les fonctions f et g définies au voisinage d'un réel a ou de $+\infty$ ou $-\infty$.

EXERCICE

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-5}{x+2}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles à C_f.
3. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.
4. Tracer dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f ainsi que ses asymptotes.

EXERCICE

Déterminer les limites suivantes et en donner une interprétation graphique lorsque cela est possible :

$$\lim_{x \to +\infty} (-2x^2 - 5x + 1) \qquad \lim_{x \to -\infty} (-2x^2 - 5x + 1) \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{1}{x} + 2\right)(x^2 - 1)$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x<-2}} \frac{x+1}{x+2} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 4} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

6) Limites et comparaison

THÉORÈME — admis

Théorème de comparaison :
Soient f et g deux fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$) avec A un réel.
- Si pour tout x de I, $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si pour tout x de I, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

REMARQUE

Ce théorème reste valable en $-\infty$, en un réel a, ou si l'inégalité n'est vérifiée qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

EXERCICE

Le but de cet exercice est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1. Déterminer le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation (On ne demande pas les limites).
2. En déduire que pour tout réel x, $f(x) > 0$, puis que $\mathrm{e}^x > x$.
3. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

THÉORÈME admis

Théorème des gendarmes :
Soient f, g et h trois fonctions définies sur $I =]A\,;+\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$), avec A un réel.
Soit l un réel.
Si pour tout x de I, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, et si g et h ont la même limite l en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

REMARQUE

Ce théorème reste valable en $-\infty$, en un réel a ou si l'encadrement n'est vérifiée qu'au voisinage de $+\infty$ (respectivement de $-\infty$ ou de a).

EXERCICE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que f a une limite en $+\infty$ et interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer de même la limite de f en $-\infty$.

II Équations différentielles

1) Notion d'équation différentielle

DÉFINITION

Une équation différentielle du premier ordre est une équation liant une fonction inconnue y, dérivable sur un intervalle I, et sa dérivée y'.

EXEMPLE

L'équation $(E) : y' = 2y$ est une équation différentielle d'inconnue une fonction y.
Résoudre cette équation, c'est trouver toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x, on ait $f'(x) = 2f(x)$.

REMARQUE

Les notations y et y' sont des abus de langage et de notation, courants dans ce contexte, qui assimilent y à $y(x)$ et y' à $y'(x)$.
En toute rigueur, l'équation différentielle $y' = 2y$ devrait s'écrire comme l'équation (E) d'inconnue y telle que pour tout réel x (à supposer que $\mathbb{R}$ soit l'intervalle de travail), $y'(x) = 2y(x)$.

EXERCICE

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$.

1. Justifier que les fonctions g et h, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \mathrm{e}^{2x+5}$ sont solutions de l'équation différentielle $(E) : y' = 2y$.
2. Proposer une autre fonction solution de l'équation différentielle (E).

2) Notion de primitives

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **primitive de** f sur I toute fonction solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Autrement dit, une primitive de f sur I est une fonction F, dérivable sur I, telle que pour tout réel x de I, $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLES

1. Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^{1-3x}$ est une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (-6x-7)\,\mathrm{e}^{1-3x}$.
2. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 + 5x - 6$.

THÉORÈME admis

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

THÉORÈME admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I.
• f admet une infinité de primitives sur I.
• Toutes les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto F(x) + k$, avec k un réel. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

3) Calcul de primitives

Fonction $f : x \mapsto \dots$	**Une primitive** $F : x \mapsto \dots$	**Sur l'intervalle** $I = \dots$
m (constante)	mx	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x^n}$ $(n$ entier, $n \geqslant 2)$	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

Dans le tableau suivant, f et g sont deux fonctions de primitives respectives F et G, u désigne une fonction dérivable, à dérivée continue, sur un intervalle I :

Fonction f du type...	**Une primitive F du type...**	**Conditions**
$f+g$	$F+G$	
kf	kF	k réel
$u'e^u$	e^u	
$2u'u$	u^2	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$

EXERCICE

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto x^4 - 3x^3 - 5x^2 + \frac{7}{3}x - 2$ sur $\mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto 2x - 4 + \frac{3}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$.
- $f : x \mapsto x^2(x^3-1)^5$ sur $\mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0;+\infty[$.

REMARQUE

Peut-on trouver facilement une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$?

4) Équation différentielle $y' = ay$

PROPRIÉTÉ — admise

Soit a un réel. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k\,\mathrm{e}^{ax}$, où k est une constante réelle.

REMARQUE

L'équation différentielle $y' = ay$ admet donc une infinité de solutions.

EXEMPLE

Résoudre l'équation différentielle $y' - 5y = 0$.

5) Équation différentielle $y' = ay + b$

THÉORÈME — admis

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

- L'équation différentielle $y' = ay + b$ admet une unique solution particulière constante de la forme $u : x \mapsto \alpha$, où α est un réel.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k\,\mathrm{e}^{ax} + \alpha$, où k est une constante réelle.

REMARQUES

- Si $k = 0$, alors $f_k(x) = -\dfrac{b}{a}$, ainsi la fonction $x \longmapsto -\dfrac{b}{a}$ est la fonction constante solution de $y' = ay + b$ et cette solution constante est bien unique.
- On peut alors écrire l'ensemble des solutions de $y' = ay + b$ comme les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = k\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$. Mais dans la pratique, on préfèrera retrouver la solution constante unique à chaque fois, par le calcul, car c'est une méthode qui se généralise dans le cadre d'équation différentielle plus complexe.

EXEMPLE

On veut résoudre l'équation différentielle $(E) : y' = 3y + 2$.

• Recherche d'une solution particulière constante :
Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \alpha$, où α est une constante réelle.
u solution de $(E) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = 3u(x) + 2$.
Or pour tout réel x, $u'(x) = 0$ (puisque u est une fonction constante), donc on a $0 = 3u(x) + 2$, soit finalement $u(x) = -\dfrac{2}{3}$.

• Conclusion :
Ainsi, d'après le théorème, les solutions de (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = k\,\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{3},\ \text{où } k \text{ est une constante réelle.}$$

EXERCICE

Soit E l'équation différentielle $(E) : 5y' + 3y = -1$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Étude des fonctions solutions f_k :
   (a) Tracer à la calculatrice les courbes de quelques solutions f_k de (E) pour des valeurs positives, négatives, décimales etc de k.
   (b) Conjecturer graphiquement et en fonction de k les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions f_k, ainsi que leurs sens de variations.
   (c) Démontrer ces conjectures.
3. Déterminer l'unique solution g de E vérifiant $g(0) = 3$.

REMARQUE

Il est possible à la calculatrice de résoudre une équation différentielle avec ou sans condition :

deSolve(5y'+3y=-1,x,y) ou **deSolve(5y'+3y=-1 and y(0)=3,x,y)**