SUITES : exercices

Exercice 1 – Utilisation du tableur

Tabuler sur la calculatrice les premiers termes des suites suivantes :

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 - 2n + 1$.
2. Pour tout entier naturel n, $\begin{cases} v_0 &= 3 \\ v_{n+1} &= 3v_n + 1 \end{cases}$
3. Pour tout entier naturel n non nul, $\begin{cases} w_1 &= 5 \\ w_{n+1} &= 2w_n + n + 3 \end{cases}$

Exercice 2 – Algorithme de seuil

En 2015, on estime à 3 200 le nombre de tigres sauvages dans le monde.
On peut craindre que ce nombre continue dans les années à venir à diminuer de 3% par an.
Pour tout entier naturel n, on note T_n le nombre de tigres sauvages en l'an $2015 + n$ selon ce modèle.

1. Déterminer l'expression de T_{n+1} en fonction de T_n, pour tout entier naturel n.
2. Quelle est la nature de la suite (T_n) ? En déduire l'expression de T_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
3. On s'intéresse dans cette question à l'algorithme suivant :

```
n ← 0
T ← 3200
TantQue T ⩾ 2700 Faire
    T ← 0,97T
    n ← n+1
FinTantQue
Afficher n
```

   (a) Faire fonctionner à la main cet algorithme et interpréter le résultat.
   (b) Programmer l'algorithme en Python et vérifier le résultat précédent.
   (c) Comment modifier cet algorithme afin qu'il affiche le nombre d'années avant que le nombre de tigres sauvages soit divisé par 2 ?
   (d) Comment modifier cet algorithme afin qu'il affiche le nombre d'années avant que le nombre de tigres sauvages soit inférieur à un seuil saisi par l'utilisateur ?

Exercice 3 – Algorithme de seuil - bis

Nicolas a gagné 200 000 euros à la loterie. Chaque mois, il dépense 5% de la somme restante.
Soit S_n la somme restante après n mois, en milliers d'euros, pour tout entier naturel n. On a donc $S_0 = 200$.

1. Déterminer l'expression de S_{n+1} en fonction de S_n, pour tout entier naturel n.
2. Écrire un algorithme en langage naturel permettant de déterminer le nombre de mois qui s'écouleront avant que la somme restante soit inférieure à 10% de la somme gagnée initialement.

Exercice 4 – Suite arithmético-géométrique 1

En 2018, on évalue la population d'une ville à 10 000 habitants. Chaque année, 10% de la population quitte la ville, et 500 personnes viennent s'y installer.
On modélise la population de cette ville par une suite u définie sur $\mathbb{N}$, où u_n est égal au nombre d'habitants en $2018 + n$.

1. Préciser u_0, puis calculer la population en 2019.
2. Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,9u_n + 500$.
3. Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique. Peut-on calculer facilement à la main la population en 2040 ?
4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 5000$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,9$.
   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer alors la population de la ville en 2040.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 5 – Suite arithmético-géométrique 2

Le solde d'un compte épargne au 1[er] Janvier de l'année $2015+n$ peut être modélisé par la suite u définie par $u_0 = 5000$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,03u_n + 600$.

1. Combien d'argent contient le compte épargne en 2015 ?
2. Déterminer la suite constante vérifiant la relation de récurrence de (u_n). On posera α cette constante.
3. Démontrer que la suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
5. Combien le compte épargne contiendra-t-il en 2030 ?

Exercice 6 – Suite arithmético-géométrique 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $u_1 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n - 6$.
Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 7 – Opérations sur les limites

Déterminer les limites des suites :

$$a_n = (1-2n)(n^2+3) \qquad b_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^2 \qquad c_n = \frac{1}{1-2n^2}$$

$$d_n = n^2 - 4n \qquad g_n = -2n^3 + 5n^2 - 4n + 1 \qquad h_n = \frac{n^2-2n+3}{4n^2+5}$$

$$i_n = \left(-1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right)(2n+4) \qquad j_n = \frac{-3n+2}{n^2+1} \qquad k_n = 2 - \frac{n^2}{\sqrt{n}}$$

$$l_n = \frac{2n-1}{n^2} \qquad m_n = 2-(1-n^2)\sqrt{n} \qquad p_n = 4 - 3^n$$

$$q_n = -84\left(\frac{3}{4}\right)^n \qquad r_n = 5(\sqrt{2})^n \qquad s_n = 2^{n+1}$$

$$t_n = 50 \times 0,7^n \qquad u_n = 3 - 2 \times 0,4^n \qquad v_n = 3n + 2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n$$

$$y_n = \frac{2^n+3^n}{5^n} \qquad z_n = \frac{2^n-7^n}{5^n}$$

Exercice 8 – Limites avec les théorèmes

A l'aide de théorèmes du cours, déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = n^2 + \cos(n) \qquad b_n = \cos(n) - n^2 \qquad c_n = \frac{\sin n}{n^2}$$

$$d_n = \frac{3-2\cos(n)}{n} \qquad e_n = n + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \qquad f_n = \frac{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n+1}$$

Exercice 9 – Un dernier exercice pour finir

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+\mathrm{e}^{-n}}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).