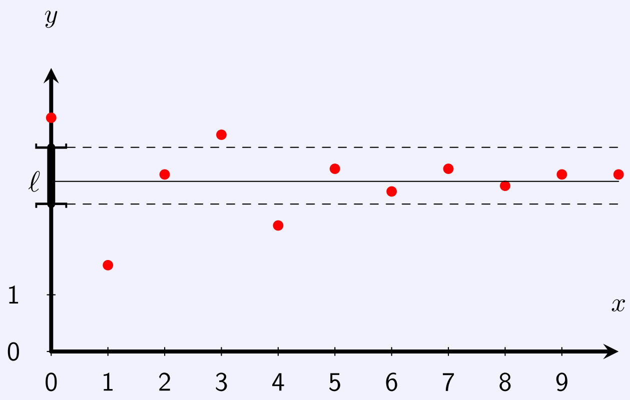
Terminale -Maths Complémentaires – Thème 02

# ÉVOLUTIONS - MODÈLES DISCRETS




# Table des matières

# I Généralités sur les suites - rappels de 1^ère...

## 1) Notion de suite

**DÉFINITION**

On appelle suite $u$ de nombres réels toute fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
L'image par $u$ d'un entier naturel $n$ est un réel noté $u_n$, et se lit « $u$ indice $n$ ».
On dit que $u_n$ est le terme général de la suite $u$.

Une suite peut être définie de plusieurs façons différentes :

• **au moyen d'une formule explicite : $u_n$ en fonction de $n$.**
(Exemple : la suite $u$ définie, pour tout entier naturel $n$, par $u_n = n^2 + 2n + 3$)

• **au moyen d'une relation de récurrence : $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.**
(Exemple : la suite $u$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$ par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$.)

## 2) Sens de variations d'une suite

**PROPRIÉTÉ**

Soit $u$ une suite définie sur $\mathbb{N}$.
Si pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite $u$ est croissante sur $\mathbb{N}$.
Si pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite $u$ est décroissante sur $\mathbb{N}$.

**EXEMPLE**

Déterminer le sens de variations de la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

## 3) Suites arithmétiques

**DÉFINITION**

Soit $u$ une suite définie sur $\mathbb{N}$.
On dit que $u$ est une suite arithmétique de raison $r$ si et seulement si il existe un réel $r$ tel que pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

**PROPRIÉTÉ**

Soit $u$ une suite arithmétique de raison $r$ définie sur $\mathbb{N}$.
Alors pour tous entiers naturels $n$ et $p$, on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

En particulier, si $u$ est définie à partir du rang 0, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

**EXEMPLE**

Soit $u$ la suite arithmétique de raison $r = 3$ définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_{10} = 2$.Calculer $u_{17}$.

**PROPRIÉTÉ**

Soit $u$ une suite arithmétique de raison $r$ définie sur $\mathbb{N}$.
Si $r > 0$, alors la suite $u$ est strictement croissante.
Si $r < 0$, alors la suite $u$ est strictement décroissante.
Si $r = 0$, alors la suite $u$ est constante.

## 4) Somme des entiers de 1 à $n$

**PROPRIÉTÉ**

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**EXEMPLE**

Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$ $(= 5050)$

## 5) Suites géométriques

**DÉFINITION**

Soit $u$ une suite définie sur $\mathbb{N}$.
On dit que $u$ est une suite géométrique de raison $q$ si et seulement si il existe un réel $q$ non nul tel que pour tout entier naturel $n$ :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

**PROPRIÉTÉ**

Soit $u$ une suite géométrique de raison $q$ définie sur $\mathbb{N}$.
Alors pour tous entiers naturels $n$ et $p$, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, si $u$ est définie à partir du rang 0, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

**EXEMPLE**

Soit $u$ la suite géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$ définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_6 = 5$. Calculer $u_{11}$.

**THÉORÈME**

Soit $u$ une suite définie sur $\mathbb{N}$, géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0$.

**Si $u_0 > 0$ :**

Si $q > 1$, alors $u$ est strictement croissante.
Si $q = 1$, alors $u$ est constante.
Si $0 < q < 1$, alors $u$ est strictement décroissante.

**Si $u_0 < 0$ :**

Si $q > 1$, alors $u$ est strictement décroissante.
Si $q = 1$, alors $u$ est constante.
Si $0 < q < 1$, alors $u$ est strictement croissante.

**Si** $u_0 = 0$, alors la suite $u$ est constante à zéro.

### 6) Somme des puissances successives d'un réel

**PROPRIÉTÉ**

Soit $q$ un réel différent de 1. Alors pour tout entier naturel $n$, on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

**EXEMPLE**

Calculer pour tout entier naturel $n$ la somme $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$. $\left(= \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1\right)$

# II Suite arithmético-géométrique

### 1) Définition

**DÉFINITION**

Soient $a$ et $b$ deux réels.
Une suite arithmético-géométrique est une suite $u$ définie par la donnée de son premier terme (généralement $u_0$ ou quelques fois $u_1$) et par une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

**REMARQUES**

- Si $a = 1$, alors la suite $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $b$.
- Si $a = 0$, alors la suite $(u_n)$ est une suite constante où tous les termes valent $b$.
- Si $b = 0$, alors la suite $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $a$.

## 2) Étude d'une suite arithmético-géométrique

Soit $(u_n)$ une suite arithmético-géométrique définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 0{,}5u_n + 2$ et $u_0 = 1$.
Pour déterminer la forme explicite de cette suite, on procède trois étapes :

• **Étape 1 :**
On déterminer la suite constante vérifiant la relation de récurrence de $(u_n)$.
Autrement dit, on résout l'équation $x = 0{,}5x + 2$ :
$x = 0{,}5x + 2 \iff 0{,}5x = 2 \iff x = \dfrac{2}{0{,}5} \iff x = 4.$

La suite constante égale à 4 vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)$.

• **Étape 2 :**
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $v_n = u_n - 4$, où 4 est la constante que l'on vient de trouver, et on montre que cette suite $(v_n)$ est géométrique :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 0{,}5u_n + 2 - 4 = 0{,}5u_n - 2 = 0{,}5(u_n - 4) = 0{,}5v_n$.
Donc $(v_n)$ est bien une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$.

• **Étape 3 :**
On déduit alors l'expression explicite de $v_n$, puis de $u_n$ :
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n = -3 \times 0{,}5^n$.
Or $v_n = u_n - 4$, donc $u_n = v_n + 4 = 4 - 3 \times 0{,}5^n$.

On peut généraliser pour toute suite arithmético-géométrique :

### PROPRIÉTÉ

Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a \neq 1$ et soit $(u_n)$ une suite arithmético-géométrique vérifiant, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Soit $\alpha$ l'unique solution de l'équation $x = ax + b$.

Alors la suite $(v_n)$, définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison $a$.

### DÉMONSTRATION

$ax + b = x \iff (a-1)x = b \iff x = \dfrac{-b}{a-1}$ (car $a \neq 1$).
Posons $\alpha = \dfrac{-b}{a-1}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \alpha = a\alpha + b \end{cases}$, donc en retranchant ces deux égalités, on obtient :
$u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha) + b - b$, soit $v_n = av_n$.

### REMARQUE

Si $a = 1$, la suite $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $b$ et on connait déjà sa formule explicite. De plus, dans le cas où $a = 1$, la propriété ci-dessus n'est pas applicable car l'équation $x = ax + b$ n'a pas de solution (puisque $x = ax + b \iff x = x + b \iff 0 = b$).

### EXEMPLE

Déterminer la formule explicite de la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2u_n + 5$ et $u_0 = 3$.

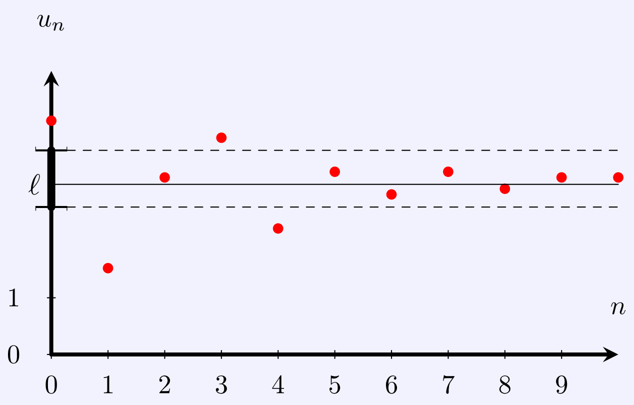
# III Limite finie ou infinie d'une suite

## 1) Limite finie : suite convergente

**DÉFINITION**

Soit $u$ une suite et $l$ un réel.
On dit que $u_n$ tend vers $l$ quand $n$ tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant $l$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite $u$ converge vers $l$ et que $l$ est la limite de $u$, et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.




**EXEMPLE**

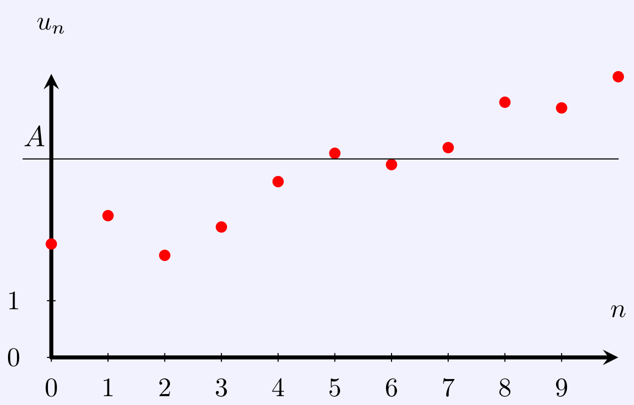
Les suites de référence $n \mapsto \dfrac{1}{n^2}$, $n \mapsto \dfrac{1}{n^3}$, $n \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0.

## 2) Limite infinie

**DÉFINITION**

Soit $u$ une suite.
On dit que $u_n$ tend vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite $u$ diverge vers $+\infty$ et que $+\infty$ est la limite de $u$, et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.



## REMARQUE

On définit de même $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ avec un intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$.

## EXEMPLES

Les suites de référence $n \mapsto n$, $n \mapsto n^2$, $n \mapsto n^3$, $n \mapsto \sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## REMARQUE

Certaines suites n'admettent pas de limite. On dit alors que la suite $u$ diverge ou est divergente.
**Exemple :** la suite $u$ définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = (-1)^n$.

# IV Opérations sur les limites

## 1) Limite d'une somme

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Si $u$ a pour limite** | $l$ | $l$ ou $+\infty$ | $l$ ou $-\infty$ | $+\infty$ |
| **Si $v$ a pour limite** | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| **Alors $u+v$ a pour limite** | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? ? ? ? ? |

## 2) Limite d'un produit

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Si $u$ a pour limite** | $l$ | $l \neq 0$ | $\infty$ | $0$ |
| **Si $v$ a pour limite** | $l'$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| **Alors $uv$ a pour limite** | $ll'$ | $\infty$ | $\infty$ | ? ? ? ? ? |

## REMARQUE

- On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

## 3) Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \neq 0$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Si $u$ a pour limite** | $l$ | $l$ | $\infty$ | $\infty$ |
| **Si $v$ a pour limite** | $l' \neq 0$ | $\infty$ | $l \neq 0$ | $\infty$ |
| **Alors $\frac{u}{v}$ a pour limite** | $\frac{l}{l'}$ | $0$ | $\infty$ | ? ? ? ? ? |

## REMARQUE

On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

## 4) Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

| | | |
|---|---|---|
| **Si $u$ a pour limite** | $l \neq 0$ ou $\infty$ | $0$ |
| **Si $v$ a pour limite** | $0$ en gardant un signe constant à partir d'un certain rang | $0$ |
| **Alors $\frac{u}{v}$ a pour limite** | $\infty$ | ? ? ? ? ? |

## REMARQUE

On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

## 5) Formes indéterminées

Les quatre cases ????? dans les tableaux précédents représentent des cas de formes indéterminées. En effet, on ne peut déterminer la limite de manière générale :

- **Forme indéterminée $+\infty - \infty$ :**

| $u_n$ | $v_n$ | $u_n + v_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2n+1$ | $-n$ | $n+1$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $n^2+1$ | $-n^2$ | $1$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $1$ |
| $n+\frac{1}{n}$ | $-n$ | $\frac{1}{n}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |

- **Forme indéterminée $\infty \times 0$ :**

| $u_n$ | $v_n$ | $u_n \times v_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | $\frac{1}{n}$ | $n$ | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $n$ | $-\frac{1}{n^2}$ | $-\frac{1}{n}$ | $+\infty$ | $0$ | $0$ |
| $5n^3$ | $\frac{2}{n^3}$ | $10$ | $+\infty$ | $0$ | $10$ |

- **Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ :**

| $u_n$ | $v_n$ | $u_n \div v_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \div v_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $3n$ | $\frac{1}{n}$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\frac{1}{3}$ |
| $2n^2$ | $-n$ | $-n$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $n$ | $2n^3$ | $\frac{1}{2n^2}$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $0$ |

- **Forme indéterminée $\frac{0}{0}$ :**

| $u_n$ | $v_n$ | $u_n \div v_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \div v_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $3$ | $0$ | $0$ | $3$ |
| $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n^2}$ | $n$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ |

Les cas de formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent.
Pour les mémoriser, on les note « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ », mais **ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction ni apparaitre sur une copie**!

## EXERCICES

*Exercices du livre et de la feuille distribuée.*

### 6) Limite d'une suite géométrique

**THÉORÈME**

Soit $q$ un réel strictement positif.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite $(q^n)$ converge vers zéro.
- Si $q > 1$, alors la suite $(q^n)$ diverge vers $+\infty$.

**REMARQUE**

Dans les exercices, pour déterminer la limite d'une suite géométrique $(u_n)$ de terme général $u_n = u_0 \times q^n$, avec $q$ un réel strictement positif, on applique le théorème précédent avec la limite d'un produit d'une suite et d'un réel.

## V Limites et comparaison

### 1) Théorème de comparaison

**THÉORÈME**

Soit $u$ et $v$ deux suites. Si pour tout entier naturel $n$ supérieur à un certain entier naturel $n_0$,
- $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

**EXEMPLE**

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par $u_n = n + (-1)^n$.

1. Justifier que la suite n'est pas monotone.
2. Déterminer sa limite quand $n$ tend vers $\infty$.

### 2) Théorème d'encadrement

**THÉORÈME**

Soit $u$, $v$ et $w$ trois suites telles que :
- $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang $n_0$,
- $v$ et $w$ convergent vers la même limite $l$,

alors la suite $u$ converge et sa limite est $l$.

**EXEMPLE**

Étudier la convergence de la suite $u$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par $u_n = \dfrac{2 + 3\cos n}{n}$.

### 3) Passage à la limite dans les inégalités

**THÉORÈME**

Soient $u$ et $v$ deux suites convergentes de limites respectives $\ell$ et $\ell'$ et soit $N$ un entier naturel.
Si pour tout entier $n \geqslant N$, on a $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.