

Terminale - Maths Complémentaires – Thème 02

ÉVOLUTIONS - MODÈLES DISCRETS

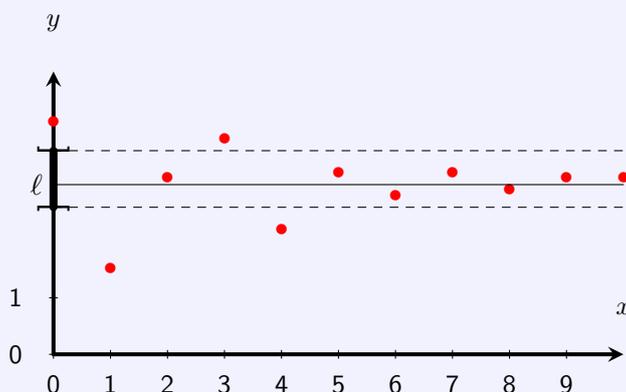


Table des matières

I	Généralités sur les suites - rappels de 1^{ère}...	2
1)	Notion de suite	2
2)	Sens de variations d'une suite	2
3)	Suites arithmétiques	2
4)	Somme des entiers de 1 à n	3
5)	Suites géométriques	3
6)	Somme des puissances successives d'un réel	4
II	Suite arithmético-géométrique	4
1)	Définition	4
2)	Étude d'une suite arithmético-géométrique	5
III	Limite finie ou infinie d'une suite	6
1)	Limite finie : suite convergente	6
2)	Limite infinie	6
IV	Opérations sur les limites	7
1)	Limite d'une somme	7
2)	Limite d'un produit	7
3)	Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$	7
4)	Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$	8
5)	Formes indéterminées	8
6)	Limite d'une suite géométrique	9
V	Limites et comparaison	9
1)	Théorème de comparaison	9
2)	Théorème d'encadrement	10
3)	Passage à la limite dans les inégalités	10

I Généralités sur les suites - rappels de 1^{ère}...

1) Notion de suite

DÉFINITION

On appelle suite u de nombres réels toute fonction définie sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels. L'image par u d'un entier naturel n est un réel noté u_n , et se lit « u indice n ». On dit que u_n est le terme général de la suite u .

Une suite peut être définie de plusieurs façons différentes :

• **au moyen d'une formule explicite** : u_n en fonction de n .

(Exemple : la suite u définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n^2 + 2n + 3$)

• **au moyen d'une relation de récurrence** : u_{n+1} en fonction de u_n .

(Exemple : la suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$.)

2) Sens de variations d'une suite

PROPRIÉTÉ

Soit u une suite définie sur \mathbb{N} .

Si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite u est croissante sur \mathbb{N} .

Si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite u est décroissante sur \mathbb{N} .

EXEMPLE

Déterminer le sens de variations de la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_n = \frac{1}{n+1}$.

3) Suites arithmétiques

DÉFINITION

Soit u une suite définie sur \mathbb{N} .

On dit que u est une suite arithmétique de raison r si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

PROPRIÉTÉ

Soit u une suite arithmétique de raison r définie sur \mathbb{N} .

Alors pour tous entiers naturels n et p , on a :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

En particulier, si u est définie à partir du rang 0, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

EXEMPLE

Soit u la suite arithmétique de raison $r = 3$ définie sur \mathbb{N} et telle que $u_{10} = 2$. Calculer u_{17} .

PROPRIÉTÉ

Soit u une suite arithmétique de raison r définie sur \mathbb{N} .

Si $r > 0$, alors la suite u est strictement croissante.

Si $r < 0$, alors la suite u est strictement décroissante.

Si $r = 0$, alors la suite u est constante.

4) Somme des entiers de 1 à n **PROPRIÉTÉ**

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

EXEMPLE

Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100$ (= 5050)

5) Suites géométriques**DÉFINITION**

Soit u une suite définie sur \mathbb{N} .

On dit que u est une suite géométrique de raison q si et seulement si il existe un réel q non nul tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

PROPRIÉTÉ

Soit u une suite géométrique de raison q définie sur \mathbb{N} .

Alors pour tous entiers naturels n et p , on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, si u est définie à partir du rang 0, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

EXEMPLE

Soit u la suite géométrique de raison $r = \frac{1}{2}$ définie sur \mathbb{N} et telle que $u_6 = 5$. Calculer u_{11} .

THÉORÈME

Soit u une suite définie sur \mathbb{N} , géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0 .

Si $u_0 > 0$:

Si $q > 1$, alors u est strictement croissante.

Si $q = 1$, alors u est constante.

Si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.

Si $u_0 < 0$:

Si $q > 1$, alors u est strictement décroissante.

Si $q = 1$, alors u est constante.

Si $0 < q < 1$, alors u est strictement croissante.

Si $u_0 = 0$, alors la suite u est constante à zéro.

6) Somme des puissances successives d'un réel**PROPRIÉTÉ**

Soit q un réel différent de 1. Alors pour tout entier naturel n , on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

EXEMPLE

Calculer pour tout entier naturel n la somme $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$. $\left(= \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1 \right)$

PROPRIÉTÉ

Conséquence : Soit q un réel différent de 1, et soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 . Alors $u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}$.

II Suite arithmético-géométrique**1) Définition****DÉFINITION**

Soient a et b deux réels.

Une suite arithmético-géométrique est une suite u définie par la donnée de son premier terme (généralement u_0 ou quelques fois u_1) et par une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

REMARQUES

- Si $a = 1$, alors la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison b .
- Si $a = 0$, alors la suite (u_n) est une suite constante où tous les termes valent b .
- Si $b = 0$, alors la suite (u_n) est une suite géométrique de raison a .

2) Étude d'une suite arithmético-géométrique

PROPRIÉTÉ

Soit a et b deux réels tels que $a \neq 1$ et soit (u_n) une suite arithmético-géométrique vérifiant, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = au_n + b$.

Soit α l'unique solution de l'équation $x = ax + b$.

Alors la suite (v_n) , définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a .

DÉMONSTRATION

$$ax + b = x \iff (a - 1)x = -b \iff x = \frac{-b}{a - 1} \text{ (car } a \neq 1 \text{)}.$$

$$\text{Posons } \alpha = \frac{-b}{a - 1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \alpha = a\alpha + b \end{cases}$, donc en retranchant ces deux égalités, on obtient :

$$u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha) + b - b, \text{ soit } v_{n+1} = av_n.$$

REMARQUE

Si $a = 1$, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison b et on connaît déjà sa formule explicite. De plus, dans le cas où $a = 1$, la propriété ci-dessus n'est pas applicable car l'équation $x = ax + b$ n'a pas de solution (puisque $x = ax + b \iff x = x + b \iff 0 = b$).

EXEMPLE

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique définie sur \mathbb{N} par $u_n = 0,5u_n + 2$ et $u_0 = 1$.

Pour déterminer la forme explicite de cette suite, on procède en trois étapes :

• Étape 1 :

On détermine la suite constante vérifiant la relation de récurrence de (u_n) .

Autrement dit, on résout l'équation $x = 0,5x + 2$:

$$x = 0,5x + 2 \iff 0,5x = 2 \iff x = \frac{2}{0,5} \iff x = 4.$$

La suite constante égale à 4 vérifie la même relation de récurrence que (u_n) .

• Étape 2 :

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $v_n = u_n - 4$, où 4 est la constante que l'on vient de trouver, et on montre que cette suite (v_n) est géométrique :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = 0,5u_n + 2 - 4 = 0,5u_n - 2 = 0,5(u_n - 4) = 0,5v_n.$$

Donc (v_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = 1 - 4 = -3$.

• Étape 3 :

On déduit alors l'expression explicite de v_n , puis de u_n :

$$\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = -3 \times 0,5^n.$$

$$\text{Or } v_n = u_n - 4, \text{ donc } u_n = v_n + 4 = 4 - 3 \times 0,5^n.$$

EXERCICE

Déterminer la formule explicite de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = -2u_n + 5$ et $u_0 = 3$.

III Limite finie ou infinie d'une suite

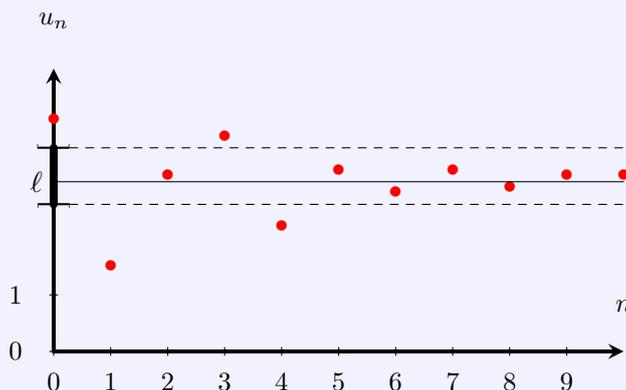
1) Limite finie : suite convergente

DÉFINITION

Soit u une suite et l un réel.

On dit que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite u converge vers l et que l est la limite de u , et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.



EXEMPLE

Les suites de référence $n \mapsto \frac{1}{n^2}$, $n \mapsto \frac{1}{n^3}$, $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0.

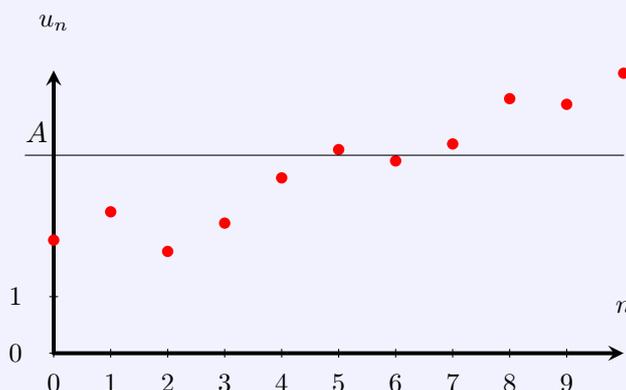
2) Limite infinie

DÉFINITION

Soit u une suite.

On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On dit alors que la suite u diverge vers $+\infty$ et que $+\infty$ est la limite de u , et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.



REMARQUE

On définit de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ avec un intervalle ouvert de la forme $] -\infty; A[$.

EXEMPLES

Les suites de référence $n \mapsto n$, $n \mapsto n^2$, $n \mapsto n^3$, $n \mapsto \sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

REMARQUE

Certaines suites n'admettent pas de limite. On dit alors que la suite u **diverge** ou **est divergente**.

Exemple : la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$.

IV Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

Si u a pour limite	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
Si v a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $u+v$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$?????

REMARQUE

les rôles de u et v peuvent être échangés.

2) Limite d'un produit

Si u a pour limite	l	$l \neq 0$	∞	0
Si v a pour limite	l'	∞	∞	∞
Alors uv a pour limite	$l \times l'$	∞	∞	?????

REMARQUES

- les rôles de u et v peuvent être échangés.
- On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

3) Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

Si u a pour limite	l	l	∞	∞
Si v a pour limite	$l' \neq 0$	∞	$l \neq 0$	∞
Alors $\frac{u}{v}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	∞	?????

REMARQUE

On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

4) Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Si u a pour limite	$\ell \neq 0$ ou ∞	0
Si v a pour limite	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain rang	0
Alors $\frac{u}{v}$ a pour limite	∞	?????

REMARQUE

On détermine le signe de la limite infinie en utilisant la règle des signes habituelle.

5) Formes indéterminées

Les quatre cases ????? dans les tableaux précédents représentent des cas de formes indéterminées. En effet, on ne peut déterminer la limite de manière générale :

• Forme indéterminée $+\infty - \infty$:

u_n	v_n	$u_n + v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$
$2n + 1$	$-n$	$n + 1$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$n^2 + 1$	$-n^2$	1	$+\infty$	$-\infty$	1
$n + \frac{1}{n}$	$-n$	$\frac{1}{n}$	$+\infty$	$-\infty$	0

• Forme indéterminée $\infty \times 0$:

u_n	v_n	$u_n \times v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n)$
n^2	$\frac{1}{n}$	n	$+\infty$	0	$+\infty$
n	$-\frac{1}{n^2}$	$-\frac{1}{n}$	$+\infty$	0	0
$5n^3$	$\frac{2}{n^3}$	10	$+\infty$	0	10

• Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$:

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \div v_n)$
n	$3n$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	$+\infty$	$\frac{1}{3}$
$2n^2$	$-n$	$-2n$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
n	$2n^3$	$\frac{1}{2n^2}$	$+\infty$	$+\infty$	0

• Forme indéterminée $\frac{0}{0}$:

u_n	v_n	$u_n \div v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \div v_n)$
$\frac{3}{n}$	$\frac{1}{n}$	3	0	0	3
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n^2}$	n	0	0	$+\infty$

Les cas de formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent.

Pour les mémoriser, on les note « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ », mais **ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction ni apparaître sur une copie !**

EXERCICES

Exercices du livre et de la feuille distribuée.

6) Limite d'une suite géométrique**THÉORÈME**

Soit q un réel strictement positif.

- Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) converge vers zéro.
- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

REMARQUE

Dans les exercices, pour déterminer la limite d'une suite géométrique (u_n) de terme général $u_n = u_0 \times q^n$, avec q un réel strictement positif, on applique le théorème précédent avec la limite d'un produit d'une suite et d'un réel.

PROPRIÉTÉ

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que $0 < q < 1$ et de premier terme u_0 .

Soit $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{u_0}{1 - q}$.

DÉMONSTRATION

$0 < q < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n+1} = 0$, donc par somme, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - q^{n+1}) = 1$.

Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_0(1 - q^{n+1}) = u_0$, et par quotient, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0(1 - q^{n+1})}{1 - q} = \frac{u_0}{1 - q}$.

V Limites et comparaison**1) Théorème de comparaison****THÉORÈME**

Soit u et v deux suites. Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 ,

- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

EXEMPLE

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + (-1)^n$.

1. Justifier que la suite n'est pas monotone.
2. Déterminer sa limite quand n tend vers ∞ .

2) Théorème d'encadrement

THÉORÈME

Soit u , v et w trois suites telles que :

- $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang n_0 ,
 - v et w convergent vers la même limite l ,
- alors la suite u converge et sa limite est l .

REMARQUE

Le théorème d'encadrement ne s'applique qu'à des suites **convergentes** ; dans le cas où les suites (v_n) et (w_n) divergent vers l'infini, le théorème de comparaison suffit.

EXEMPLE

Étudier la convergence de la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{2 + 3 \cos n}{n}$.

3) Passage à la limite dans les inégalités

THÉORÈME

Soient u et v deux suites convergentes de limites respectives l et l' et soit N un entier naturel.

Si pour tout entier $n \geq N$, on a $u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$.