Terminale -Maths Complémentaires – Thème 01

MODÈLES DÉFINIS PAR UNE FONCTION

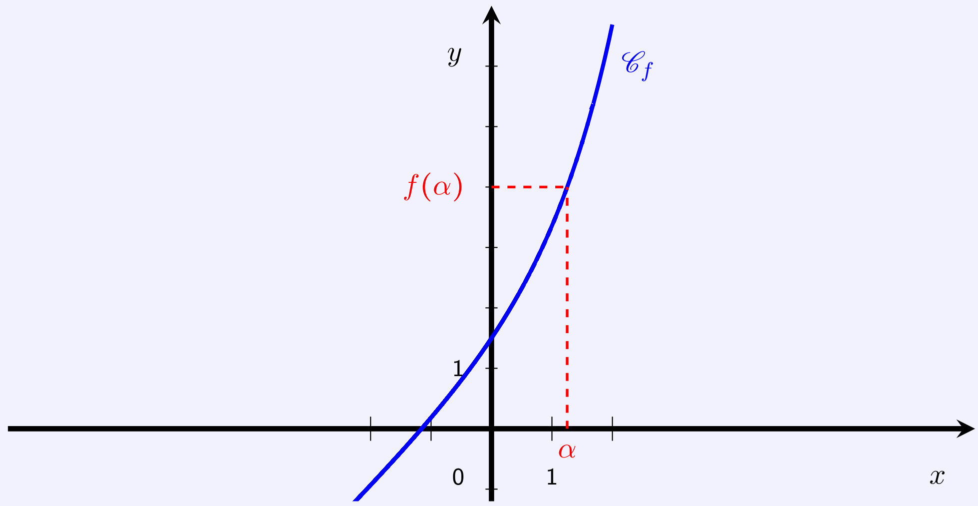


Table des matières

I Dérivation et application

1) Fonctions dérivées

a Tableau des dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	D_f	$D_{f'}$	Conditions
k	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a,b réels
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	
$\lvert x \rvert$	$\begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	

b Tableau récapitulatif des opérations sur les dérivées

f	f'	Conditions
$u+v$	$u'+v'$	
ku	ku'	k réel
$u-v$	$u'-v'$	
uv	$u'v+uv'$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$
e^u	$u' \times e^u$	

c Autres propriétés de dérivation

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction u^2 définie sur I par $x \mapsto u(x)^2$ est dérivable sur I, et pour tout réel x de I, on a :

$$\boldsymbol{(u^2)'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x)}$$

DÉMONSTRATION

La démonstration est immédiate à partir de la dérivée d'un produit de deux fonctions.

REMARQUE

On peut généraliser le résultat précédent pour n'importe quelle puissance entière et positive de u :
Soit n un entier naturel et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n \times u' \times u$.

EXEMPLE

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x^2 - 1)^5$.

PROPRIÉTÉ

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$.
Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I et soit J un intervalle tel que, pour tout réel x de J, $ax + b$ appartient à I.

Alors la fonction f définie sur J par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur J et pour tout réel x de J,

$$\boldsymbol{f'(x) = a \times g'(ax + b)}$$

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x + 5)^3$.
Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2) Applications à l'étude de fonctions

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est **croissante** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $\boldsymbol{f'(x) \geqslant 0}$.
- La fonction f est **décroissante** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $\boldsymbol{f'(x) \leqslant 0}$.
- La fonction f est **constante** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $\boldsymbol{f'(x) = 0}$.

REMARQUE

- Si f' est strictement positive sur I et éventuellement nulle en des points isolés uniquement, alors f est **strictement croissante** sur I.
- Si f' est strictement négative sur I et éventuellement nulle en des points isolés uniquement, alors f est **strictement décroissante** sur I.

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.

La **tangente à la courbe représentative** de f au point $A(a\,;f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Elle admet pour équation

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$$

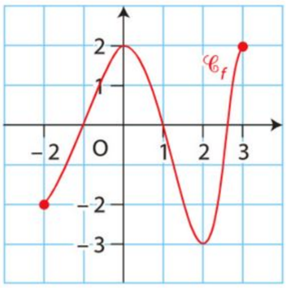
II Continuité

1) Continuité sur un intervalle

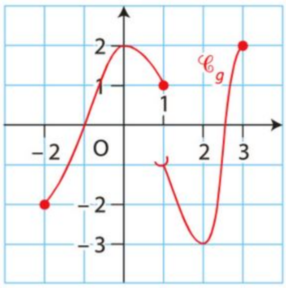
DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
Dire que f est continue sur I signifie que l'on peut tracer sa courbe C sans lever le crayon.

Exemple



Contre-exemple



REMARQUE

Dans un tableau de variations, les flèches traduisent la continuité et la stricte monotonie.

2) Propriétés des fonctions dérivables

PROPRIÉTÉ

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.
Ainsi, dans la pratique, pour justifier qu'une fonction est continue sur I, il suffit de montrer qu'elle est dérivable sur I.

REMARQUE

Attention, la réciproque de cette propriété est fausse.
Exemple avec la fonction racine carrée, continue sur $[0\,;+\infty[$ mais dérivable uniquement sur $]0\,;+\infty[$.

PROPRIÉTÉ

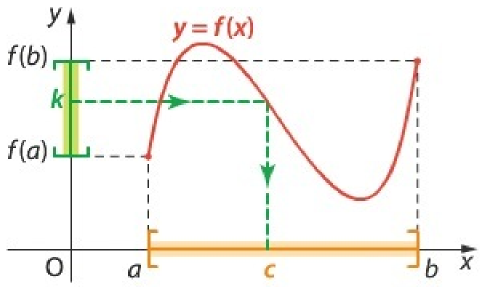
Conséquences :

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- Si u est une fonction dérivable sur I, alors la fonction e^u est continue sur I.

3) Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, avec a et b des réels.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a;b]$.



EXEMPLE

Montrer que l'équation $x^5 + 2x - 1 = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Correction :
Soit $f : x \mapsto x^5 + 2x - 1$. f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et donc continue sur $\mathbb{R}$.
Or $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ et 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0;1]$, et donc dans $\mathbb{R}$.

4) Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

COROLLAIRE

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I tels que $a \leqslant b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il **existe un unique** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans l'intervalle $[a;b]$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$
Démontrer que sur $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution α, dont on donnera un encadrement à 10^{-2} près.
Correction :
Faire une étude complète de $f : x \mapsto x^3 - 6x^2 + 6$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-26	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICES

Exercices 1, 2 et 3 du polycopié.

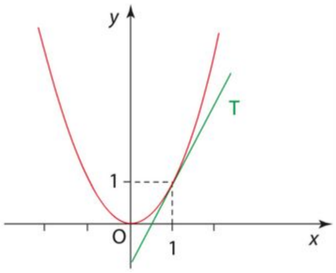
III Convexité

1) Fonctions convexes, fonctions concaves

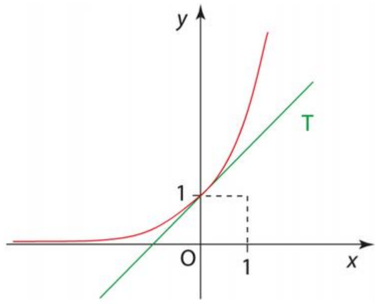
DÉFINITION

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.
- Dire que f est convexe sur I signifie que, sur I, C est **au-dessus** de ses tangentes.
- Dire que f est concave sur I signifie que, sur I, C est **en-dessous** de ses tangentes.

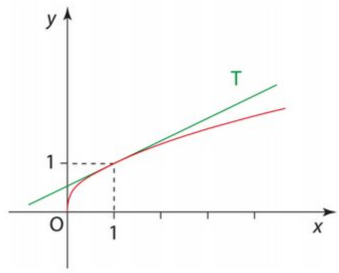
Fonction carrée :
convexe sur $\mathbb{R}$



Fonction exp :
convexe sur $\mathbb{R}$

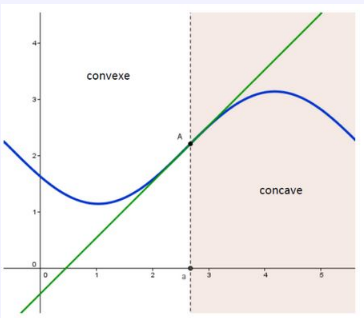


Fonction racine carrée :
concave sur $[0\,;+\infty[$



2) Point d'inflexion

DÉFINITION



Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère du plan.
Soit a un réel de I.

Dire que le point $A(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de C signifie qu'au point A, la courbe C traverse la tangente en a.

Conséquence :
En l'abscisse a d'un point d'inflexion, la fonction f change de convexité.

3) Convexité et dérivées f' et f''

a Convexité et sens de variation de f'

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur I.
- f est concave sur $I \iff f'$ est décroissante sur I.

EXEMPLE

$f : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x$ et la fonction $f' : x \mapsto 2x$ est bien croissante sur $\mathbb{R}$.

b Convexité et signe de f''

DÉFINITION

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Dire que f est deux fois dérivable sur I signifie que f' est dérivable sur I.
La dérivée de f', notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

EXEMPLE

$f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.
La fonction f' est dérivable également sur $\mathbb{R}$.
Donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f''(x) = 2$.

Conséquence :
On peut alors reformuler la propriété du III 3 a ainsi :

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur $I \iff \forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geqslant 0$.
- f est concave sur $I \iff \forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \leqslant 0$.

4) Point d'inflexion et dérivée seconde

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.
Soit a un réel de I.
$A(a\,;f(a))$ est un point d'inflexion de $C \iff f''$ s'annule en a en changeant de signe.

EXEMPLE

$f : x \mapsto x^3$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.
On dresse (immédiat) le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, le point $A(0\,;0)$ est un point d'inflexion de C.

EXERCICE

Exercice 4 du polycopié.