

Terminale - Maths Complémentaires – Thème 01

MODÈLES DÉFINIS PAR UNE FONCTION

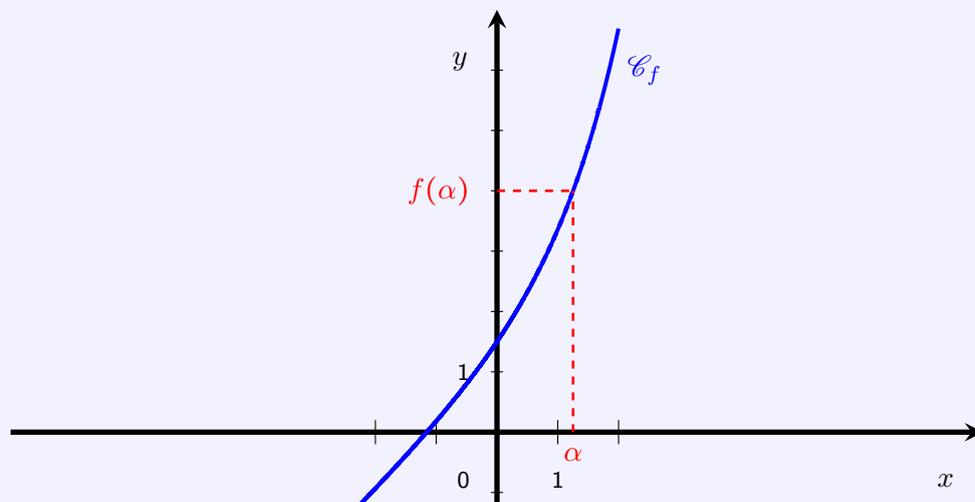


Table des matières

I	Dérivation et application	2
1)	Fonctions dérivées	2
2)	Applications à l'étude de fonctions	3
II	Continuité	4
1)	Continuité sur un intervalle	4
2)	Propriétés des fonctions dérivables	4
3)	Théorème des valeurs intermédiaires	5
4)	Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires	5
III	Convexité	6
1)	Fonctions convexes, fonctions concaves	6
2)	Point d'inflexion	6
3)	Convexité et dérivées f' et f''	6
4)	Point d'inflexion et dérivée seconde	7

I Dérivation et application

1) Fonctions dérivées

a Tableau des dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	D_f	$D_{f'}$	Conditions
k	0	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$k \in \mathbb{R}$
$ax + b$	a	\mathbb{R}	\mathbb{R}	a, b réels
x^2	$2x$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
x^3	$3x^2$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	
x^n	nx^{n-1}	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	
$ x $	$\begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}^*	
e^x	e^x	\mathbb{R}	\mathbb{R}	

b Tableau récapitulatif des opérations sur les dérivées

f	f'	Conditions
$u + v$	$u' + v'$	
ku	ku'	k réel
$u - v$	$u' - v'$	
uv	$u'v + uv'$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v \neq 0$
e^u	$u' \times e^u$	

c Autres propriétés de dérivation

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

La fonction u^2 définie sur I par $x \mapsto u(x)^2$ est dérivable sur I , et pour tout réel x de I , on a :

$$(u^2)'(x) = 2 \times u'(x) \times u(x)$$

DÉMONSTRATION

La démonstration est immédiate à partir de la dérivée d'un produit de deux fonctions.

REMARQUE

On peut généraliser le résultat précédent pour n'importe quelle puissance entière et positive de u :
 Soit n un entier naturel et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .
 Alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n \times u' \times u$.

EXEMPLE

Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (3x^2 - 1)^5$.

PROPRIÉTÉ

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$.

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I et soit J un intervalle tel que, pour tout réel x de J , $ax + b$ appartient à I .

Alors la fonction f définie sur J par $f(x) = g(ax + b)$ est dérivable sur J et pour tout réel x de J ,

$$f'(x) = a \times g'(ax + b)$$

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (4x + 5)^3$.

Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

2) Applications à l'étude de fonctions

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f est **croissante** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$.
- La fonction f est **décroissante** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$.
- La fonction f est **constante** sur I si et seulement si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$.

REMARQUE

- Si f' est strictement positive sur I et éventuellement nulle en des points isolés uniquement, alors f est **strictement croissante** sur I .
- Si f' est strictement négative sur I et éventuellement nulle en des points isolés uniquement, alors f est **strictement décroissante** sur I .

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

La **tangente à la courbe représentative** de f au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Elle admet pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

II Continuité

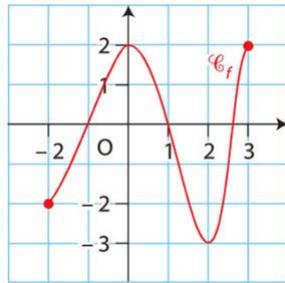
1) Continuité sur un intervalle

DÉFINITION

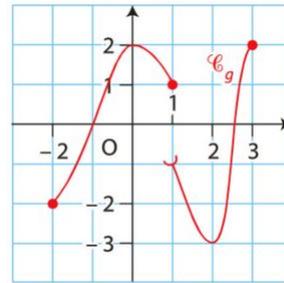
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

Dire que f est continue sur I signifie que l'on peut tracer sa courbe C sans lever le crayon.

Exemple



Contre-exemple



REMARQUE

Dans un tableau de variations, les flèches traduisent la continuité et la stricte monotonie.

2) Propriétés des fonctions dérivables

PROPRIÉTÉ

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

Ainsi, dans la pratique, pour justifier qu'une fonction est continue sur I , il suffit de montrer qu'elle est dérivable sur I .

REMARQUE

Attention, la réciproque de cette propriété est fausse.

Exemple avec la fonction racine carrée, continue sur $[0; +\infty[$ mais dérivable uniquement sur $]0; +\infty[$.

PROPRIÉTÉ

Conséquences :

- Les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R} .
- La fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} .
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- Si u est une fonction dérivable sur I , alors la fonction e^u est continue sur I .

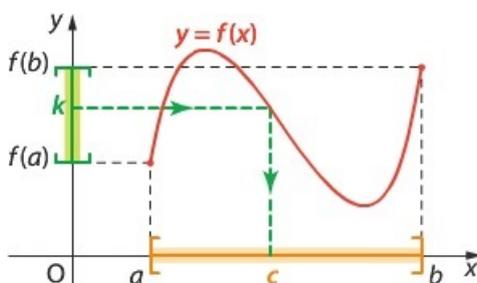
3) Théorème des valeurs intermédiaires

THÉORÈME

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, avec a et b des réels.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins une** solution dans $[a; b]$.



EXEMPLE

Montrer que l'équation $x^5 + 2x - 1 = 0$ a au moins une solution dans \mathbb{R} .

Correction :

Soit $f : x \mapsto x^5 + 2x - 1$. f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R} , et donc continue sur \mathbb{R} .

Or $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ et 0 est compris entre $f(0)$ et $f(1)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0; 1]$, et donc dans \mathbb{R} .

4) Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

COROLLAIRE

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I .

Soient a et b deux réels de I tels que $a \leq b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il **existe un unique** réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans l'intervalle $[a; b]$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

- Déterminer le sens de variations de f sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variations sur $[-7; 7]$.
- Démontrer que, sur l'intervalle $[-7; 7]$, l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution α .
- Déterminer un encadrement à 10^{-2} près de α .

Correction partielle :

x	-7	0	4	7	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-426	6	-26	55	

EXERCICES

Exercices 1, 2 et 3 du polycopié.

III Convexité

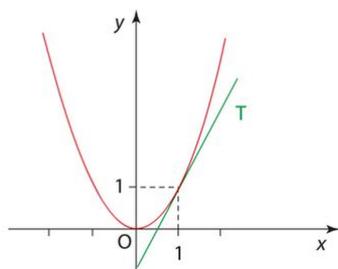
1) Fonctions convexes, fonctions concaves

DÉFINITION

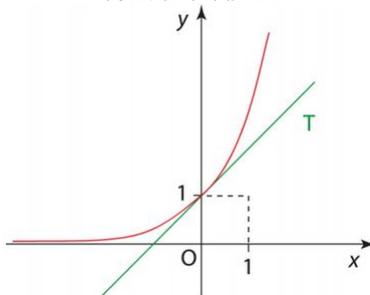
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.

- Dire que f est convexe sur I signifie que, sur I , C est **au-dessus** de ses tangentes.
- Dire que f est concave sur I signifie que, sur I , C est **en-dessous** de ses tangentes.

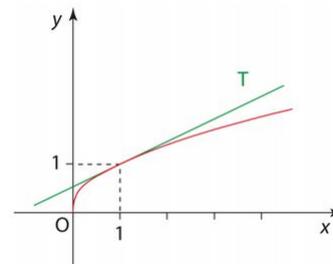
Fonction carrée :
convexe sur \mathbb{R}



Fonction exp :
convexe sur \mathbb{R}

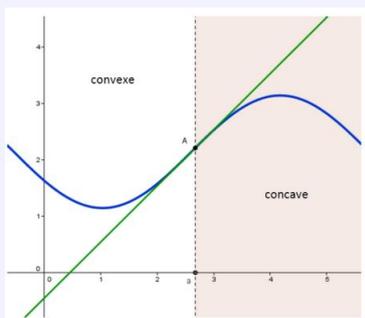


Fonction racine carrée :
concave sur $[0; +\infty[$



2) Point d'inflexion

DÉFINITION



Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère du plan.

Soit a un réel de I .

Dire que le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de C signifie qu'au point A , la courbe C traverse la tangente en a .

Conséquence :

En l'abscisse a d'un point d'inflexion, la fonction f change de convexité.

3) Convexité et dérivées f' et f'' a Convexité et sens de variation de f'

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur I .
- f est concave sur $I \iff f'$ est décroissante sur I .

EXEMPLE

$f : x \mapsto x^2$ est convexe sur \mathbb{R} .

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$ et la fonction $f' : x \mapsto 2x$ est bien croissante sur \mathbb{R} .

b Convexité et signe de f'' **DÉFINITION**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Dire que f est deux fois dérivable sur I signifie que f' est dérivable sur I .

La dérivée de f' , notée f'' , est appelée dérivée seconde de f .

EXEMPLE

$f : x \mapsto x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel $x, f'(x) = 2x$.

La fonction f' est dérivable également sur \mathbb{R} .

Donc f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel $x, f''(x) = 2$.

Conséquence :

On peut alors reformuler la propriété du III 3 a ainsi :

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

• f est convexe sur $I \iff \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \geq 0$.

• f est concave sur $I \iff \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) \leq 0$.

4) Point d'inflexion et dérivée seconde**PROPRIÉTÉ**

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère.

Soit a un réel de I .

$A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $C \iff f''$ s'annule en a en changeant de signe.

EXEMPLE

$f : x \mapsto x^3$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R} .

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$.

On dresse (immédiat) le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Ainsi, le point $A(0; 0)$ est un point d'inflexion de C .

EXERCICE

Exercice 4 du polycopié.