Seconde – Chapitre 09

PROBABILITÉS

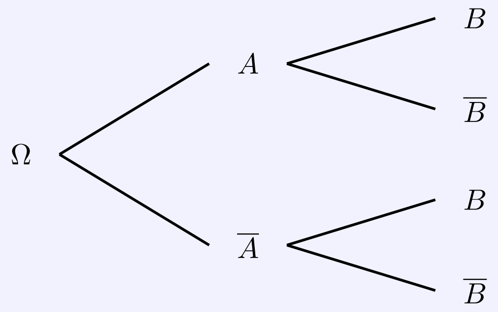
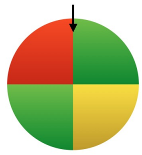


Table des matières

On réalise les trois expériences suivantes :

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On lance une pièce de monnaie équilibrée et on regarde sa face supérieure.	On lance un dé à 6 faces équilibré et on regarde le nombre de points inscrits sur sa face supérieure.	On fait tourner une roue de loterie équilibrée, on attend qu'elle se stabilise et on regarde la couleur désignée par la flèche.
		

I Vocabulaire

1) Expérience, issue et univers

DÉFINITIONS

• Une expérience est dite **aléatoire** si on ne peut pas en prévoir le résultat à l'avance.
• Chaque résultat possible d'une expérience aléatoire est appelée une **issue**.
• L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé l'**univers** de cette expérience. On le note généralement Ω (« Omega »).

EXEMPLES

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Cette expérience admet 2 issues : pile et face. $\Omega = \{\text{pile} ; \text{face}\}$	Cette expérience admet 6 issues : 1, 2, 3, 4, 5 et 6. $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$	Cette expérience admet 3 issues : vert, rouge et jaune. $\Omega = \{\text{vert} ; \text{rouge} ; \text{jaune}\}$

2) Événements

a Définition

DÉFINITION

Un **événement** est une partie de l'univers d'une expérience aléatoire : c'est donc un ensemble d'issues.

EXEMPLES

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
« On obtient pile » est un événement qui ne contient qu'une seule issue (« pile »).	« On obtient un nombre pair » est un événement réalisé par les issues 2, 4 et 6.	« La flèche désigne une couleur primaire » est un événement réalisé par deux issues : rouge et jaune.

b Événements particuliers

DÉFINITIONS

- On appelle « **événement certain** » un événement qui se réalise toujours.
- On appelle « **événement impossible** » un événement qui ne peut jamais se réaliser. On peut le noter $\emptyset$ (« ensemble vide »).
- On appelle « **événement élémentaire** » un événement qui ne contient qu'une seule issue.

EXEMPLES

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
« On obtient pile ou face » est un événement **certain**. « On obtient pile » est un événement **élémentaire**.	« On obtient un nombre inférieur ou égal à 6 » est un événement **certain**. « On obtient 7 » est un événement **impossible**.	« La flèche désigne du bleu » est un événement **impossible**. « La flèche désigne le rouge » est un événement **élémentaire**.

c Événement contraire (ou complémentaire)

DÉFINITION

Soit E un événement d'une expérience. On appelle **événement contraire** (ou complémentaire), l'événement, noté $\overline{E}$ (« E barre »), réalisé par toutes les issues ne réalisant pas l'événement E (Ils n'ont aucune issue en commun).

EXEMPLES

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Soit E l'événement « obtenir Pile ». Alors l'événement contraire de E est l'événement $\overline{E}$ « obtenir Face ».	Soit E l'événement « obtenir 1, 2, ou 5 ». Alors l'événement contraire de E est l'événement $\overline{E}$: « obtenir 3, 4 ou 6 ».	Soit E l'événement « obtenir le rouge ». Alors l'événement contraire de E est l'événement $\overline{E}$: « obtenir le vert ou le jaune ».

d Événements incompatibles

DÉFINITION

Soient E et F deux événements d'une même expérience. On dit que E et F sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

EXEMPLES

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Soit E l'événement « obtenir Pile » et F l'événement « obtenir Face ». E et F sont incompatibles.	Soit E l'événement « obtenir 5 » et F l'événement « obtenir un nombre pair ». E et F sont incompatibles.	Soit E l'événement « obtenir le rouge » et F l'événement « obtenir le vert ». E et F sont incompatibles.

REMARQUE

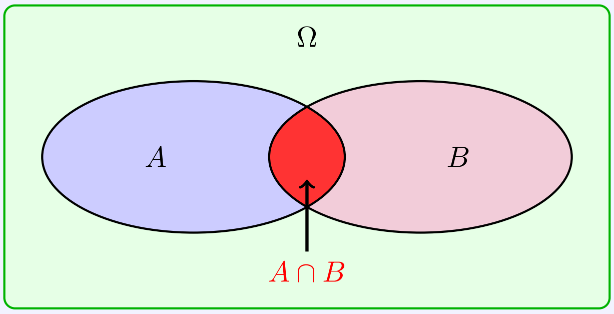
Deux événements contraires sont donc incompatibles. Mais la réciproque est fausse : deux événements incompatibles ne sont pas nécessairement contraires !

3) Réunion et intersection d'événements

DÉFINITION

Soient A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.

On appelle **intersection** de A et de B et on note $A \cap B$ (« A inter B ») l'événement constitué des issues qui sont **à la fois** dans A et dans B.



EXEMPLE

On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Soit A l'événement « On obtient un nombre pair » ;
Soit B l'événement « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 ».

Alors $A \cap B$ est l'événement « On obtient un nombre pair **et** qui soit supérieur ou égal à 3 », soit « On obtient 4 ou 6 »

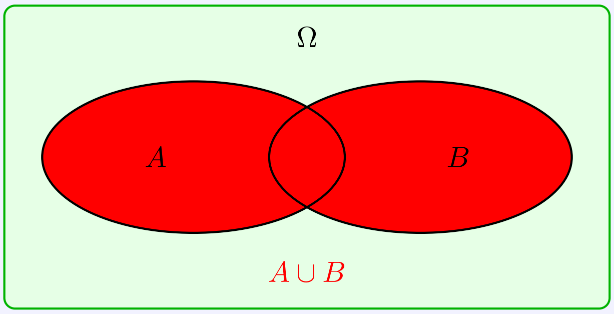
REMARQUE

Si A et B sont incompatibles, alors l'événement $A \cap B$ est un événement impossible. On a alors $A \cap B = \emptyset$.

DÉFINITION

Soient A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.

On appelle **réunion** de A et de B et on note $A \cup B$ (« A union B ») l'événement constitué des issues qui sont dans A, ou dans B ou dans les deux.



EXEMPLE

On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Soit A l'événement « On obtient un nombre pair » ;
Soit B l'événement « On obtient un nombre supérieur ou égal à 3 ».

Alors $A \cup B$ est l'événement « On obtient un nombre pair **ou bien** un nombre supérieur ou égal à 3, ou les deux », soit « On obtient 2, 3, 4, 5 ou 6 »

II Notion de probabilité

1) Définition

DÉFINITION

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité**.

REMARQUE

Si A un événement d'une expérience aléatoire, alors on note $P(A)$ la probabilité que l'événement A se réalise.

EXEMPLES

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
Si on lançait la pièce un très grand nombre de fois, on obtiendrait pile environ une fois sur deux.	Si on lançait le dé un très grand nombre de fois, on obtiendrait 4 environ une fois sur six.	Si on faisait tourner la roue de loterie un très grand nombre de fois, on obtiendrait vert environ une fois sur deux.

2) Propriétés

PROPRIÉTÉS admises

- Une probabilité est un **nombre compris entre 0 et 1**.
- Un événement dont la probabilité est nulle est un **événement impossible**.
- Un événement dont la probabilité est égale à 1 est un **événement certain**.
- La somme des probabilités de toutes les issues est égale à 1.

EXEMPLES

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
« Obtenir Pile ou Face » est un événement certain. Sa probabilité est égale à 1.	- « Obtenir un nombre positif » est un événement certain. Sa probabilité est égale à 1. - « Obtenir 7 » est un événement impossible. Sa probabilité est nulle.	- « Obtenir le noir » est un événement impossible. Sa probabilité est nulle.

PROPRIÉTÉ admise

Pour tout événement A, on a : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

EXEMPLE

Soit A un événement de probabilité $P(A) = 0,3$. Alors $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,3 = 0,7$.

3) Équiprobabilité

DÉFINITION

Lorsque toutes les issues ont la même probabilité d'être réalisées, on dit qu'il s'agit d'une **situation d'équiprobabilité**.

EXEMPLES

La pièce de monnaie	Le dé à 6 faces	La roue de loterie
On a autant de chance d'obtenir pile que face : il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.	On a autant de chance d'obtenir 1, que 2, que 3, que 4, que 5 ou que 6 : il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.	On a deux fois plus de chance d'obtenir vert que rouge : il ne s'agit pas d'une situation d'équiprobabilité.

PROPRIÉTÉ admise

Soit n le nombre d'issues d'une expérience aléatoire, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement élémentaire est égale à $\frac{1}{n}$.

EXEMPLE

Si on lance un dé à 6 faces non truqué, on obtient les issues suivantes et leurs probabilités :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Toutes les issues sont équiprobables : il s'agit bien d'une situation d'**équiprobabilité**.

4) Probabilités de plusieurs événements

PROPRIÉTÉ

Soient A et B deux événements d'un même univers Ω. Alors on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

REMARQUE

Si A et B sont incompatibles, alors on a vu que $A \cap B = \emptyset$. Ainsi, $P(A \cap B) = 0$ et on a alors, **uniquement dans ce cas là**, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

EXEMPLE

On lance un dé bien équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Soient A l'événement « obtenir un nombre pair » et B l'événement « obtenir un multiple de 3 ».

1) Calculer $P(A)$ et $P(B)$.

2) Que représente l'événement $A \cap B$? Calculer alors sa probabilité.

3) En déduire $P(A \cup B)$.

4) Retrouver le résultat précédent en énumérant toutes les issues vérifiant l'événement $A \cup B$.