Deux méthodes pour déterminer le sens de variations d'une fonction.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3(x - 2)^2 + 1$$

1) A l'aide de la calculatrice, conjecturer le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Nous allons démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$:

Soient a et b deux réels de $[2; +\infty[$ tels que $2 \leq a < b$.

2) **Première méthode : en étudiant le signe de $f(b) - f(a)$:**

a) Démontrer que $f(b) - f(a) = 3(b - a)(b + a - 4)$.

b) Démontrer alors que $f(b) - f(a) > 0$, et en déduire que f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

3) **Deuxième méthode : à l'aide d'encadrements successifs :**

a) Démontrer que si $2 \leq a < b$, alors $(a - 2)^2 < (b - 2)^2$.

b) En déduire que $f(a) < f(b)$ puis que f est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

4) En procédant de façon similaire, démontrer à l'aide des deux méthodes que f est strictement décroissante sur $] -\infty; 2]$.

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -2(x - 3)^2 + 5$$

Déterminer le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$:

1) A l'aide de la première méthode ;

2) A l'aide de la deuxième méthode.

Exercice 3

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ par

$$g(x) = -\frac{4}{x + 5}$$

Déterminer le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ à l'aide de la méthode de votre choix.