

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

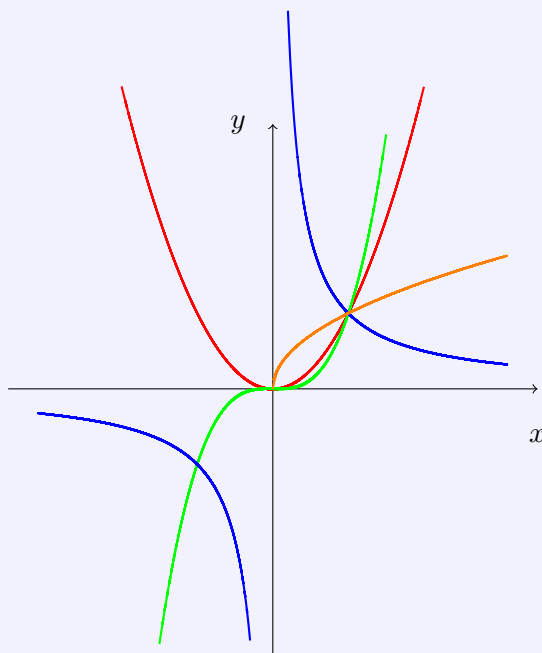


Table des matières

I	La fonction carré	2
1)	Définition et propriétés	2
2)	Variations de la fonction carré	2
3)	Représentation graphique de la fonction carré	3
4)	Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction carré	4
II	La fonction cube	5
1)	Définition et propriétés	5
2)	Variations de la fonction cube	5
3)	Représentation graphique de la fonction cube	5
4)	Position relative des courbes d'équations $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$	6
III	La fonction inverse	7
1)	Définition et propriété	7
2)	Variations de la fonction inverse	8
3)	Représentation graphique de la fonction inverse	9
IV	La fonction racine carrée	9
1)	Définition et propriétés	9
2)	Variations de la fonction racine carrée	10
3)	Représentation graphique de la fonction racine carrée	10

I La fonction carré

1) Définition et propriétés

DÉFINITION

La **fonction carré** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

REMARQUE

$1^2 = 1$ et $2^2 = 4$. 2^2 n'est pas le double de 1^2 .

La fonction carré n'est donc pas linéaire. Sa représentation graphique **ne sera pas** une droite.

PROPRIÉTÉ

La fonction carré est paire sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout réel x , $(-x)^2 = x^2$.

DÉMONSTRATION

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^2 = (-1)^2 \times x^2 = 1 \times x^2 = x^2.$$

REMARQUE

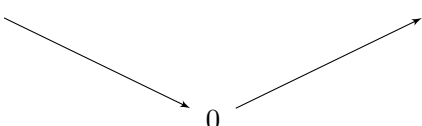
La fonction carré est paire sur $\mathbb{R}$, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2) Variations de la fonction carré

PROPRIÉTÉ

La fonction carré est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Son tableau de variations sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			

DÉMONSTRATION

Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$.

• **Démontrons que f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$:**

Soient a et b deux réels de $[0 ; +\infty[$ tels que $0 \leq a < b$

Alors $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$.

Or $a < b$ donc $b - a > 0$, et puisque $a \geq 0$ et $b \geq 0$, on a donc $b + a > 0$ (strictement car $a < b$ donc a et b ne sont pas tous les deux nuls).

Ainsi, $f(b) - f(a) > 0$, donc $f(a) < f(b)$

$0 \leq a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ donc la fonction f est bien strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

DÉMONSTRATION

- Démontrons que f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$:

Soient a et b deux réels de $] -\infty ; 0]$ tels que $a < b \leq 0$

Alors $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$.

Or $a < b$ donc $b - a > 0$, et puisque $a \leq 0$ et $b \leq 0$, on a donc $b + a < 0$ (strictement car $a < b$ donc a et b ne sont pas tous les deux nuls).

Ainsi, $f(b) - f(a) < 0$, donc $f(a) > f(b)$

$a < b \leq 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$ donc la fonction f est bien strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$.

REMARQUE

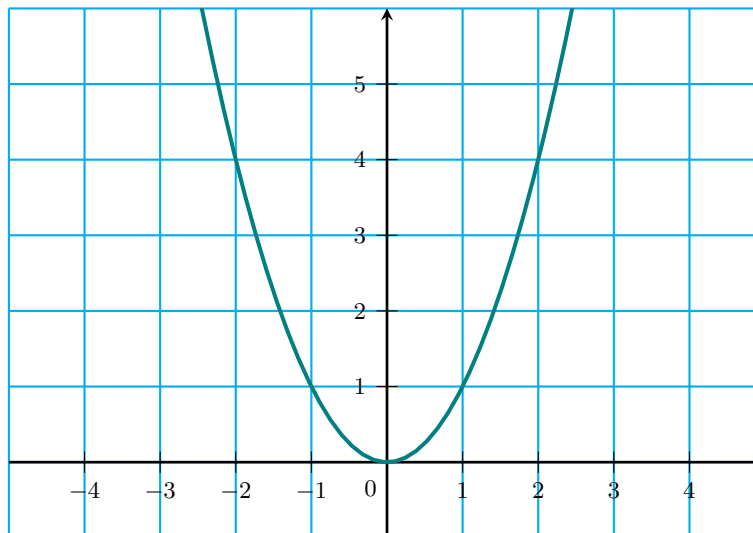
La fonction carré étant paire sur $\mathbb{R}$, on aurait aussi pu, après avoir démontré que f était strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, en déduire directement que f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0]$ par symétrie de sa courbe par rapport à l'axe des ordonnées.

3) Représentation graphique de la fonction carré

DÉFINITIONS

- La représentation graphique de la fonction carré s'appelle **une parabole**.
- L'origine du repère O est appelé le **sommet** de la parabole.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16



EXERCICE

Donner un encadrement de x^2 dans chaque cas :

a) $x \in [3 ; 5]$

b) $x \in [-4 ; -1]$

c) $x \in [-2 ; 6]$

4) Résolution d'équations et d'inéquations avec la fonction carré

PROPRIÉTÉ

Soit a un réel.

- Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet exactement **deux** solutions dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet **une unique** solution dans $\mathbb{R}$: 0.
- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet **aucune** solution dans $\mathbb{R}$.

REMARQUE

Cette propriété, et sa démonstration, ont été vues dans le chapitre 3.

EXEMPLES

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^2 - 12 = 0$, et l'équation $5x^2 + 3 = 0$.

PROPRIÉTÉ

Soit a un réel.

- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 \leq a$:
 - Si $a > 0$, alors $x^2 \leq a \iff x \in [-\sqrt{a}; \sqrt{a}]$;
 - Si $a = 0$, alors $x^2 \leq a \iff x = 0$;
 - Si $a < 0$, alors l'inéquation $x^2 \leq a$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $x^2 \geq a$:
 - Si $a > 0$, alors $x^2 \geq a \iff x \in]-\infty; -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}; +\infty[$;
 - Si $a \leq 0$, alors $x^2 \geq a \iff x \in \mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 \leq a$ ou l'inéquation $x^2 \geq a$ revient à étudier le signe de $x^2 - a$.

- **Cas où $a > 0$** : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - a = x^2 - \sqrt{a}^2 = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$.

On dresse alors un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	$+\infty$
$x - \sqrt{a}$	-	0	+	+
$x + \sqrt{a}$	-	-	0	+
$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$	+	0	-	+

- **Cas où $a < 0$** : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, donc l'inéquation $x^2 \leq a$ n'a pas solution dans $\mathbb{R}$ et l'inéquation $x^2 \geq a$ admet tout réel comme solution.

- **Cas où $a = 0$** : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, donc l'inéquation $x^2 \leq 0$ a pour unique solution 0 et l'inéquation $x^2 \geq 0$ admet tout réel comme solution.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $2(x^2 - 5) \geq 0$ et $13 - x^2 > 0$.

II La fonction cube

1) Définition et propriétés

DÉFINITION

La **fonction cube** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

REMARQUE

Tout comme la fonction carré, la fonction cube n'est pas linéaire. Sa représentation graphique ne sera donc pas une droite.

PROPRIÉTÉ

La fonction cube est impaire sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout réel x , $(-x)^3 = -x^3$.

DÉMONSTRATION

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^3 = (-1)^3 \times x^3 = -1 \times x^3 = -x^3.$$

REMARQUE

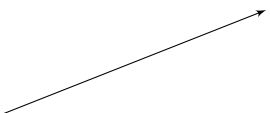
La fonction cube est impaire sur $\mathbb{R}$, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

2) Variations de la fonction cube

PROPRIÉTÉ

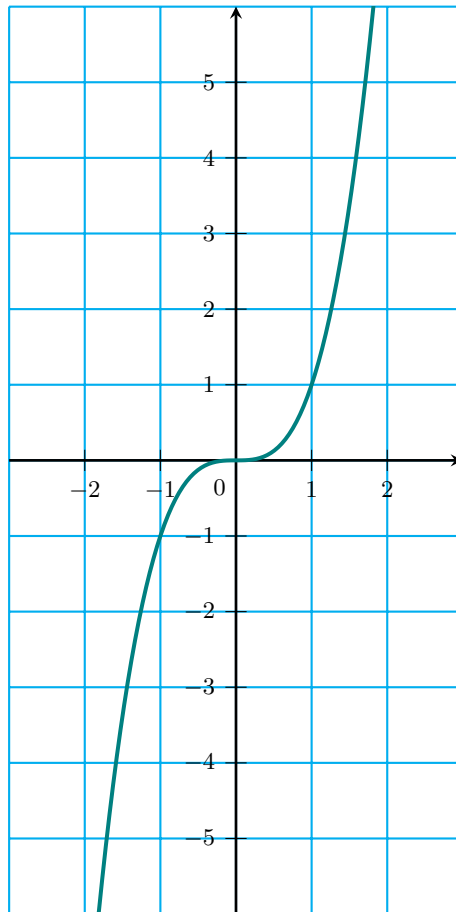
admise

La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
x^3		

3) Représentation graphique de la fonction cube

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^3	-27	-8	-1	0	1	8	27



EXEMPLE

Le volume d'une boule de rayon R ($R > 0$) est donné par la formule $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.
Justifier que lorsque le rayon augmente, le volume de la boule augmente.

4) Position relative des courbes d'équations $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$

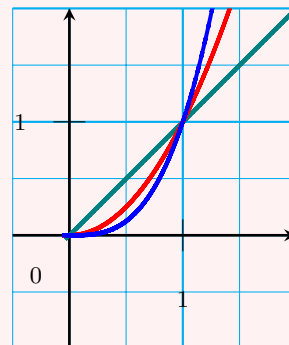
PROPRIÉTÉ

- Pour tout réel $x \in [0; 1]$, on a :

$$x^3 \leq x^2 \leq x$$

- Pour tout réel $x \in [1; +\infty[$, on a :

$$x \leq x^2 \leq x^3$$



DÉMONSTRATION

Comparaison de x^3 et x^2 :

$\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$. On dresse alors un tableau de signes :

x	0	1	$+\infty$
x^2	0	+	+
$x - 1$	-	0	+
$x^2(x - 1)$	0	-	+

Ainsi, $\forall x \in [0; 1]$, on a bien $x^3 - x^2 \leq 0$, donc $x^3 \leq x^2$ et $\forall x \in [1; +\infty[$, on a bien $x^3 - x^2 \geq 0$, donc $x^2 \leq x^3$.

EXERCICE

En procédant de même, démontrer que $\forall x \in [0; 1]$, $x^2 \leq x$ et que $\forall x \in [1; +\infty[$, $x \leq x^2$.

EXERCICE

- Sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres $0,842^2$ et $0,842^3$.
- Sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres π , π^2 et π^3 .

III La fonction inverse

1) Définition et propriété

DÉFINITION

La **fonction inverse** est la fonction f définie sur $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

REMARQUES

- L'ensemble $] -\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est aussi noté $\mathbb{R}^*$.
- 0 n'a pas d'image par la fonction inverse. Autrement dit, 0 est la valeur interdite de la fonction inverse.
- La fonction inverse n'est pas linéaire. Sa représentation graphique ne sera pas une droite.

PROPRIÉTÉ

La fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$. Autrement dit, pour tout réel x non nul, $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

REMARQUE

La fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

2) Variations de la fonction inverse

PROPRIÉTÉ

La fonction inverse est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et aussi sur $]0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			

DÉMONSTRATION

Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$.

- **Démontrons que f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$:**

Soient a et b deux réels de $]0 ; +\infty[$ tels que $0 < a < b$

$$\text{Alors } f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}.$$

D'une part, $a < b$ donc $a - b < 0$.

D'autre part, $a > 0$ et $b > 0$ donc par produit $ab > 0$.

Ainsi, par quotient, $\frac{a - b}{ab} < 0$, autrement dit $f(b) - f(a) < 0$, donc $f(a) > f(b)$

$0 < a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$ donc la fonction inverse est bien strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

- **Démontrons que f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$:**

Soient a et b deux réels de $] -\infty ; 0[$ tels que $a < b < 0$

$$\text{Alors } f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}.$$

D'une part, $a < b$ donc $a - b < 0$.

D'autre part, $a < 0$ et $b < 0$ donc par produit $ab > 0$.

Ainsi, par quotient, $\frac{a - b}{ab} < 0$, autrement dit $f(b) - f(a) < 0$, donc $f(a) > f(b)$

$a < b < 0 \Rightarrow f(a) > f(b)$ donc la fonction inverse est bien strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$.

REMARQUE

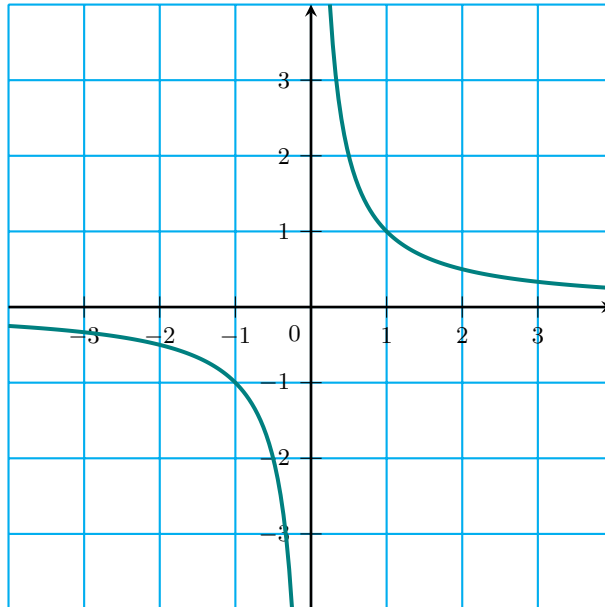
On ne peut pas dire que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. En effet, l'affirmation « lorsque les valeurs de x augmentent sur $\mathbb{R}^*$, leurs inverses diminuent » est fausse : par exemple, 3 est plus grand que -2 , mais son inverse $\frac{1}{3}$ est aussi plus grand que l'inverse de -2 qui est $-\frac{1}{2}$.

3) Représentation graphique de la fonction inverse

DÉFINITION

La courbe représentative de la fonction inverse s'appelle une **hyperbole**.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\frac{1}{x}$	-0,25	$\approx -0,33$	-0,5	-1		1	0,5	$\approx 0,33$	0,25



IV La fonction racine carrée

1) Définition et propriétés

DÉFINITION

La fonction **racine carrée** est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

REMARQUES

- L'ensemble $[0; +\infty[$ se note aussi $\mathbb{R}^+$. On a bien $0 \in \mathbb{R}^+$.
- La fonction racine carrée n'est pas définie sur $] -\infty; 0[$ car la racine carrée d'un réel n'existe que si ce réel est positif ou nul (cf. premier chapitre).
- La fonction racine carrée n'est pas linéaire ($\sqrt{1} = 1$ et $\sqrt{4} = 2$ donc $\sqrt{4}$ n'est pas le quadruple de $\sqrt{1}$). Donc la représentation graphique de la fonction racine carrée ne sera pas une droite non plus...

PROPRIÉTÉS

On rappelle les propriétés déjà rencontrées sur la racine carrée :

- $\forall x \in \mathbb{R}^+$ et $\forall y \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \times \sqrt{y}$ et si $y \neq 0$, $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

REMARQUE

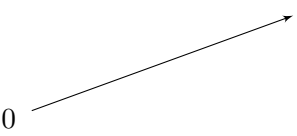
On rappelle également que, sauf rare exception, $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

2) Variations de la fonction racine carrée

PROPRIÉTÉ

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	



DÉMONSTRATION

Soit f la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}^+$.

Démontrons que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

Soient a et b deux réels de $\mathbb{R}^+$ tels que $0 \leq a < b$

$$\text{Alors } f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \times 1 = (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \times \frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

($\sqrt{b} + \sqrt{a}$ est bien différent de 0 puisque a et b ne peuvent pas être nuls tous les deux, puisque $0 \leq a < b$)

$$\text{donc } f(b) - f(a) = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

D'une part, puisque $a < b$, alors $b - a > 0$.

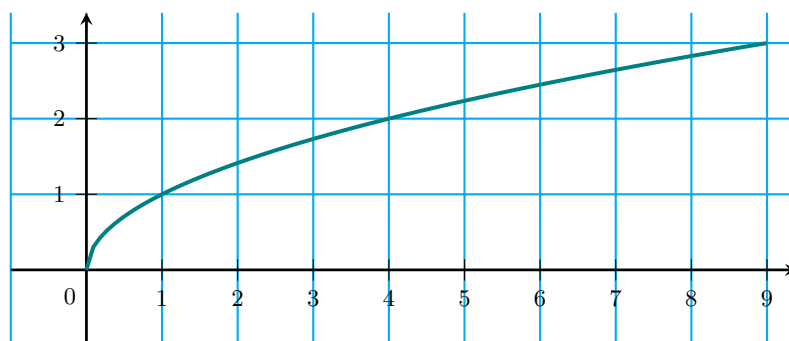
D'autre part, $\sqrt{b} > 0$ et $\sqrt{a} \leq 0$, donc par somme, $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$.

Donc par quotient, $\frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0$, autrement dit, $f(b) - f(a) > 0$, donc $f(a) < f(b)$

$0 \leq a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$ donc la fonction racine carrée est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

3) Représentation graphique de la fonction racine carrée

x	0	1	2	3	4	9
$\sqrt{x}$	0	1	$\approx 1,4$	$\approx 1,7$	2	3



EXERCICES

- En utilisant les variations de la fonction racine carrée, déterminer un encadrement de $\sqrt{x}$ dans les deux cas suivants :

a) $x \in [2; 9]$ **b)** $x \in]8; +\infty[$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\sqrt{x} = 5$ **b)** $3 + 5\sqrt{x} = 7$ **c)** $7 - \sqrt{x} = 11$ **d)** $\sqrt{9x} = 2$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $2\sqrt{x} - 1 \leq 5$ **b)** $3\sqrt{x} - 1 > 0$ **c)** $4 + \sqrt{x} < 6$ **d)** $\sqrt{2x} + 3 \geq 0$

- Tracer sur la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x} + 2$ et $g(x) = x$, puis résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq x$.