Seconde – Chapitre 05

ÉTUDE DE FONCTIONS

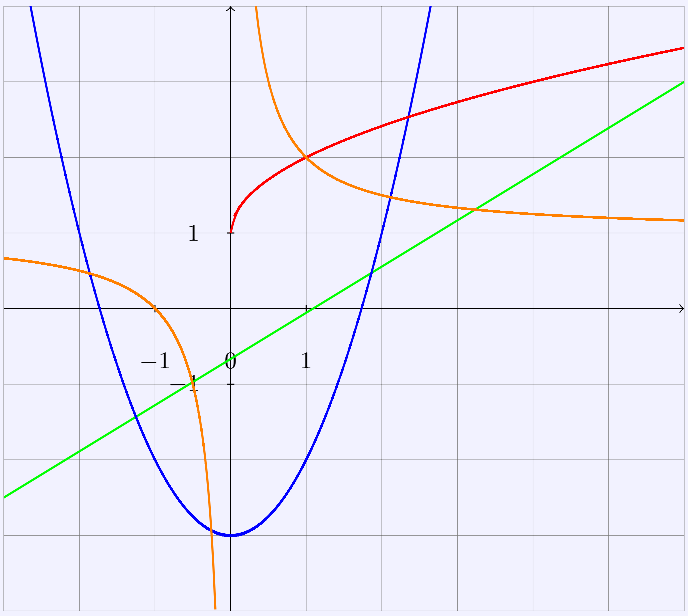


Table des matières

I Généralités sur les fonctions

1) Définition, notation et vocabulaire

DÉFINITION

On appelle **fonction numérique** (ou plus simplement **fonction**) une relation qui, à un réel x (appelé **variable**), associe un **et un seul** réel noté $f(x)$:

$$\begin{array}{rll} f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & & \text{« } f \text{ est définie de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ »} \\ x \longmapsto f(x) & & \text{« à } x\text{, on associe le réel } f(x) \text{ »} \end{array}$$

On dit alors que :
- $f(x)$ est l'image de x par la fonction f
- x est **un** antécédent de $f(x)$ par la fonction f.

REMARQUE

Il y a une différence entre « f » et « $f(x)$ » : f est une fonction, et $f(x)$ est un réel (c'est l'image du réel x par la fonction f).

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.
Alors $f(2) = 3 \times 2^2 + 1 = 3 \times 4 + 1 = 12 + 1 = 13$; ainsi, 13 est l'image de 2 par la fonction f.
On peut aussi dire que 2 est **un** antécédent de 13 par la fonction f.
Cet antécédent n'est pas nécessairement unique. En effet, $f(-2)$ vaut également 13.

EXERCICE

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$ et $g(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$.

1) Calculer l'image de -3 par la fonction f.

2) Calculer $g(3)$.

3) Déterminer les antécédents de -1 par la fonction f.

2) Ensemble de définition

EXEMPLE

Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{3x-4}{x+2}$. Peut-on calculer $h(x)$ pour n'importe quel réel x ?

On sait que $\dfrac{3x-4}{x+2}$ existe $\Longleftrightarrow x+2 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq -2$.

Donc on ne peut pas calculer $h(-2)$ (mais on peut calculer $h(x)$ pour tous les autres réels x différents de -2). On dit que f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ ou que **l'ensemble de définition** de f est $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

DÉFINITION

Soit f une fonction.
L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ existe.

EXEMPLES

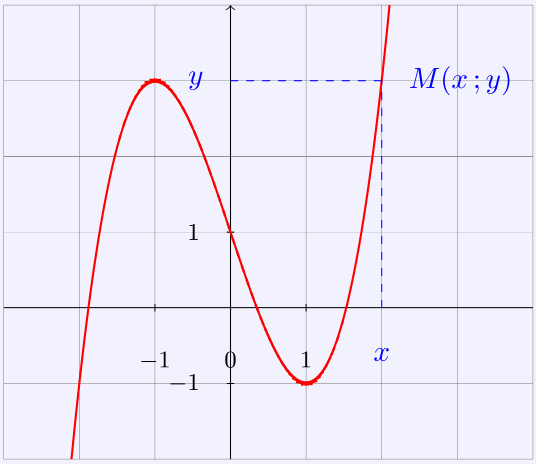
Déterminer les ensembles de définition des fonctions f, g, h et k définies par

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 2\,;\ g(x) = \frac{5-2x}{3x+2}\,;\ h(x) = \frac{5+2x}{(x-3)(2x+4)} \text{ et } k(x) = \sqrt{x}.$$

3) Courbe représentative

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f.
Dans un repère orthogonal du plan, on appelle **courbe représentative** de la fonction f l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $y = f(x)$. L'égalité $y = f(x)$ est appelée **l'équation de la courbe de f**.



4) Fonction paire, fonction impaire

DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

• On dit que f est paire sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.
• On dit que f est impaire sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

EXEMPLES

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 4x^2$. Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.
• Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - x$. Démontrer que g est impaire sur $\mathbb{R}$.

REMARQUE

Dans le contexte des fonctions, le contraire d'une « fonction paire » n'est pas une « fonction impaire ».
La plupart des fonctions n'est ni paire, ni impaire.

PROPRIÉTÉ — admise

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
• Si f est paire sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
• Si f est impaire sur $\mathbb{R}$, alors sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

EXEMPLES

On reprend les fonctions f et g de l'exemple précédent.

1) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivants de la fonction f :

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$						

2) La fonction f étant paire sur $\mathbb{R}$, tracer sa courbe sur l'intervalle $[-5\,;5]$.

3) Faire de même avec la fonction g, impaire sur $\mathbb{R}$.

II Résolution d'équations et d'inéquations

1) Résolution graphique

PROPRIÉTÉ admise

Soit f une fonction définie sur un ensemble de réel D_f et soit a un réel.
• Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = a$, c'est lire les abscisses des points de la courbe de f ayant une ordonnée égale à a.
• Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant a$, c'est lire les abscisses des points de la courbe de f ayant une ordonnée inférieure ou égale à a.

EXEMPLES

Exemples dans le livre : exercices 1 à 4 page 251.

PROPRIÉTÉ admise

Soient f et g deux fonctions définies sur un même ensemble de réel D.
• Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$, c'est lire les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec la courbe de g.
• Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$, c'est lire les abscisses des points de la courbe de f situés en-dessous de la courbe de g.

EXEMPLES

Exemples dans le livre : 37 et 38 page 260–261.

REMARQUE

On peut également résoudre ces équations et inéquations numériquement.

EXEMPLE

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + x + 1$ et $g(x) = 5x^2 + 3x + 1$.
Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection des courbes de f et de g.

2) Signe d'une fonction

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un ensemble de réels D_f.
- On dit que f est positive sur un ensemble D (inclus dans D_f) si pour tout réel $x \in D$, $f(x) \geqslant 0$.
- On dit que f est négative sur un ensemble D (inclus dans D_f) si pour tout réel $x \in D$, $f(x) \leqslant 0$.

REMARQUE

« Déterminer le signe d'une fonction f », c'est déterminer les ensembles sur lesquels elle est positive, ceux sur lesquels elle est négative, et les valeurs pour lesquelles la fonction s'annule. On résume souvent la réponse sous la forme d'un tableau de signes.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)(x-3)$.
Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$.

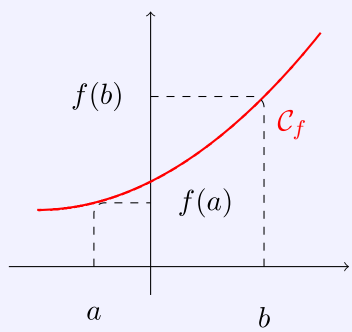
III Variations de fonctions

1) Définition

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un ensemble de réels D_f et soit I un intervalle inclus dans D_f.

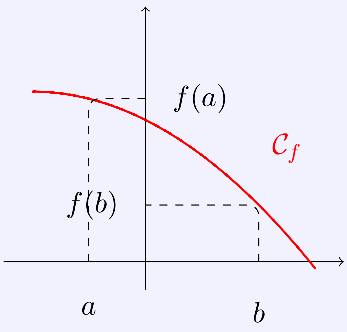
On dit que f est **croissante** sur I si, et seulement si,
pour tout réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.



DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un ensemble de réels D_f et soit I un intervalle inclus dans D_f.

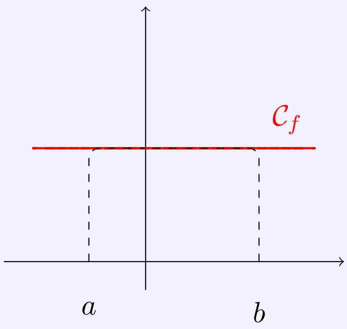
On dit que f est **décroissante** sur I si, et seulement si,
pour tout réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$.



DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un ensemble de réels D_f et soit I un intervalle inclus dans D_f.

On dit que f est **constante** sur I si, et seulement si,
pour tout réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) = f(b)$.

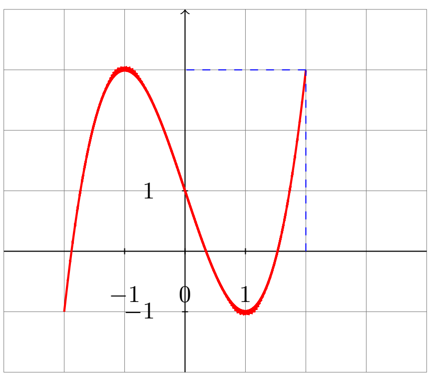


REMARQUES

- On définit de la même façon une fonction **strictement croissante** (respectivement **strictement décroissante**) avec une inégalité stricte $f(a) < f(b)$ (respectivement $f(a) > f(b)$).

- Une fonction n'est croissante (ou décroissante) que **sur un intervalle**.

EXEMPLES



Soit f la fonction définie sur $[-2\,;2]$ et représentée ci-contre.

Ici, f est strictement croissante sur $[-2\,;-1]$ et sur $[1\,;2]$

et f est strictement décroissante sur $[-1\,;1]$.

DÉFINITION

Si f est une fonction qui ne change pas de variations sur un intervalle, on dit qu'elle est **monotone** sur cette intervalle.

EXEMPLE

La fonction représentée ci-dessus n'est pas monotone sur $[-2\,;2]$ car elle change de variations en $x=-1$ et $x=1$. En revanche, elle est bien (strictement) monotone sur $[-1\,;-1]$ (par exemple).

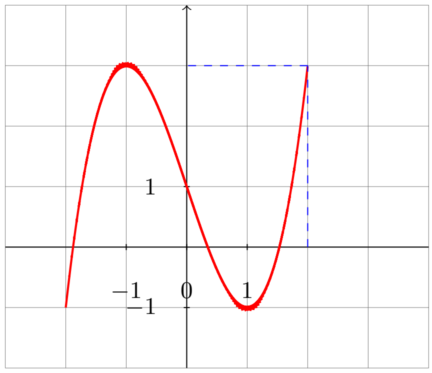
2) Tableau de variations

DÉFINITION

On peut résumer les variations d'une fonction dans un **tableau de variation**.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;2]$ et représentée ci-dessous :



On peut alors dresser le tableau de variations de f ainsi :

x	-2		-1		1		2
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

REMARQUE

Lorsqu'une fonction admet une valeur interdite, on la symbolise avec une double barre dans le tableau de variations.

3) Extremum d'une fonction sur un intervalle

DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur un ensemble de réels D_f.
• On appelle **minimum** m de la fonction f sur D_f la plus petite image possible par f pour un réel appartenant à D_f.
• On appelle **maximum** M de la fonction f sur D_f la plus grande image possible par f pour un réel appartenant à D_f.

REMARQUES

- Si f admet un minimum m sur D_f, alors, $\forall x \in D_f$, $f(x) \geqslant m$.
- Si f admet un maximum M sur D_f, alors, $\forall x \in D_f$, $f(x) \leqslant M$.

EXEMPLE

Tracer une courbe d'une fonction f sur un intervalle fermé et y lire le minimum et le maximum.

REMARQUE

Une fonction n'admet pas nécessairement un minimum ni un maximum sur son ensemble de définition. En revanche, elle peut en admettre sur un intervalle inclus dans son ensemble de définition.

EXEMPLES

• Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$. (Faire une figure)
Alors la fonction f admet un minimum égal à -1 et atteint en $x = 0$, mais pas de maximum sur $\mathbb{R}$.
En revanche, si on étudie la fonction f uniquement sur l'intervalle $[-2\,;4]$, alors f admet un maximum égal à 15 et atteint en $x = 4$ sur l'intervalle $[-2\,;4]$.
• La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 3$ n'a ni maximum, ni minimum sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION

On appelle **extremum** d'une fonction f un minimum ou un maximum de f.