Seconde – Chapitre 03

# CALCUL LITTÉRAL ET APPLICATIONS

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

## Table des matières

# I Expression littérale

## 1) Définition

**DÉFINITION**

Une expression littérale est une expression mathématique dans laquelle une (ou plusieurs) valeur(s) est (sont) remplacé(es) par une (ou plusieurs) lettre(s).

**EXEMPLES**

- $3x+2$ ; $(5x+1)^2$ ; $2y-3$ ; $\dfrac{x}{y}$ ; $a+b+c$
- L'aire d'un disque de rayon $R$ est une expression littérale : $\pi R^2$.
- Le périmètre d'un rectangle de longueur $L$ et de largeur $\ell$ est une expression littérale : $2L+2\ell$.

## 2) Développement et Factorisation

**DÉFINITION**

- Développer, c'est transformer en **somme** une expression écrite sous la forme d'un produit.
- Factoriser, c'est transformer en **produit** une expression écrite sous la forme d'une somme.

**PROPRIÉTÉS** admises

Soient $a$, $b$, $c$, $d$, et $k$ des réels. Alors :

- $k(a+b) = ka+kb$ ; 
- $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$

**EXEMPLES**

Développer les expressions suivantes, dans lesquelles $x$ et $y$ sont des réels :

$A = 3(2x+1)+5(3-x)$ $B = -2(x-1)+6$ $C = 3x^2+8x(x-1)$

$D = 5x-3(x-2)$ $E = (2x+4)(3+5x)$ $F = (5x-1)(3-2x)$

$G = 3x(5-3x)-(3+x)(2+4x)$ $H = 2x-5(x+1)(x-2)$ $I = (2x+1)+3x(y+1)$

$J = (3x+2)(5-2y)$

Factoriser les expressions suivantes, dans lesquelles $x$ est un réel :

$A = 3x^2+6x$ $B = 15-5x$ $C = 12x^2-6x$

$D = 4x^2+8x(x+1)$ $E = (x+1)(3+x)+(x+1)(5+2x)$ $F = (4x+3)^2+(3-x)(4x+3)$

$G = (3-5x)(x+2)-(3-5x)^2$

### 3) Identités remarquables

**PROPRIÉTÉ**

Soient $a$ et $b$ deux réels. Alors :

- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

**DÉMONSTRATION**

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+ab+ab+b^2 = \boxed{a^2+2ab+b^2}$
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ab-ba+b^2 = a^2-ab-ab+b^2 = \boxed{a^2-2ab+b^2}$
- $(a+b)(a-b) = a^2-ab+ba-b^2 = a^2-ab+ab-b^2 = \boxed{a^2-b^2}$

**EXEMPLES**

Développer les expressions suivantes, dans lesquelles $x$ est un réel :

$A = (2x+3)^2$ $\quad$ $B = (3x-2)^2$ $\quad$ $C = \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)$ $\quad$ $D = (6x-\sqrt{2})(6x+\sqrt{2})$

Factoriser les expressions suivantes, dans lesquelles $x$ est un réel :

$A = 25x^2-16$ $\quad$ $B = 9x^2-1$ $\quad$ $C = 4x^2+4x+1$ $\quad$ $D = 16x^2-24x+9$

# II Résolution d'équation

### 1) Définition et vocabulaire

**DÉFINITIONS**

- Une **équation** est une égalité dans laquelle figurent une ou plusieurs **inconnues** désignées par des lettres.

- Une **solution** d'une équation d'inconnue $x$ est une valeur de $x$ pour laquelle l'égalité est vraie.

- **Résoudre** dans $\mathbb{R}$ une équation à une inconnue consiste à déterminer, si elles existent, toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$ de l'inconnue vérifiant l'égalité proposée. Ces valeurs constituent **l'ensemble des solutions** de l'équation.

- Deux équations qui ont le même ensemble de solutions sont dites **équivalentes**.

**EXEMPLES**

- $2x+3 = x^2$ est une équation d'inconnue $x$ ; 3 est une solution de cette équation puisque si $x = 3$, alors d'une part $2x+3 = 2\times3+3 = 6+3 = 9$ et d'autre part, $x^2 = 3^2 = 9$ également, donc l'égalité est bien vérifiée.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2+5x+1 = 0$ revient à déterminer **toutes** les valeurs réelles de $x$ pour lesquelles l'égalité $3x^2+5x+1 = 0$ est vraie.

- Les deux équations $3x+2 = 0$ et $3x = -2$ sont **équivalentes**. On peut alors le noter ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 3x+2 = 0 \iff 3x = -2$$

### EXERCICE

Démontrer que, pour tout réel $x$,

$$(3x-5)^2-4(x+1)=6(x+1)^2+(x-15)(3x-1)$$

## 2) Équation du premier degré à une inconnue

### DÉFINITION

Une **équation du premier degré** à une inconnue $x$ est une équation pouvant se ramener à la forme $ax+b=0$, avec $a$ et $b$ des réels, et $a \neq 0$.

### EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5x-1=x-9$.

**Correction :**

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ 5x-1=x-9 &\iff 5x-x=-9+1\\ &\iff 4x=-8\\ &\iff \frac{4x}{4}=\frac{-8}{4}\\ &\iff \boxed{x=-2}\end{aligned}$$

Donc la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $5x-1=x-9$ est $\boxed{-2}$

### REMARQUE

Attention, il faut toujours regarder dans quel ensemble la résolution doit-être faite. Par exemple, pour l'équation précédente, si la résolution demandée est dans $\mathbb{N}$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.

## 3) Équation produit nul

### PROPRIÉTÉ admise

Soient $A$ et $B$ des réels. Alors :

$$A \times B = 0 \iff A=0 \textbf{ ou } B=0.$$

### EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x-7)(-x+3)=0$.

**Correction :**

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ (2x-7)(-x+3)=0 &\iff 2x-7=0 \quad \text{ou} \quad -x+3=0\\ &\iff 2x=7 \quad \text{ou} \quad -x=-3\\ &\iff \boxed{x=\frac{7}{2} \quad \text{ou} \quad x=3}\end{aligned}$$

Ainsi, les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(2x-7)(-x+3)=0$ sont $\boxed{\frac{7}{2} \text{ et } 3}$

## 4) Équation quotient nul

**PROPRIÉTÉ** admise

Soient $A$ et $B$ des réels. Alors :

$$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0 \textbf{ et } B \neq 0$$

**EXEMPLE**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{3x+4}{x-5} = 0$.

**Correction :**

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\quad \frac{3x+4}{x-5} = 0 &\iff 3x+4 = 0 \quad \text{et} \quad x-5 \neq 0\\ &\iff 3x = -4 \quad \text{et} \quad x \neq 5\\ &\iff \boxed{x = -\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad x \neq 5}\end{aligned}$$

Ainsi, la solution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{3x+4}{x-5} = 0$ est $\boxed{-\dfrac{4}{3}}$

**REMARQUE**

On dit que 5 est la **valeur interdite** de l'expression $\dfrac{3x+4}{x-5}$.

## 5) Équations de la forme $x^2 = a$

**PROPRIÉTÉ**

Soit $a$ un réel.

- Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet exactement **deux** solutions dans $\mathbb{R}$ : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
- Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet **une unique** solution dans $\mathbb{R}$ : 0.
- Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet **aucune** solution dans $\mathbb{R}$.

**DÉMONSTRATION**

- **Cas où $a > 0$** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $$\begin{aligned} x^2 = a &\iff x^2 = (\sqrt{a})^2\\ &\iff x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0\\ &\iff (x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) = 0\\ &\iff x+\sqrt{a} = 0 \text{ ou } x-\sqrt{a} = 0\\ &\iff \boxed{x = -\sqrt{a}} \text{ ou } \boxed{x = \sqrt{a}}\end{aligned}$$
- **Cas où $a = 0$** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 = a \iff x^2 = 0 \iff \boxed{x = 0}$
- **Cas où $a < 0$** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc l'équation $x^2 = a$ n'a $\boxed{\text{pas de solution dans } \mathbb{R}}$

# III Résolution d'inéquations

## 1) Inégalités et propriétés

**DÉFINITION**

Une inégalité est une affirmation fondée sur l'un des signes suivants : $<$ ; $\leqslant$ ; $>$ ; $\geqslant$.

**EXEMPLES**

L'inégalité $5 > 2$ est une affirmation qui est vraie ; l'inégalité $3 \leqslant 3$ également.
En revanche, l'inégalité $4 \leqslant -1$ est une affirmation fausse.

**PROPRIÉTÉ** admise

On peut ajouter ou retrancher un même réel aux deux membres d'une inégalité, en conservant son sens. Autrement dit, pour tous réels $a$, $b$ et $c$ :

- $a \leqslant b \iff a + c \leqslant b + c$
- $a \leqslant b \iff a - c \leqslant b - c$

**EXEMPLES**

- $4 \geqslant -1 \iff 4 + 5 \geqslant -1 + 5 \iff 9 \geqslant 4$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $3x + 4 \leqslant 5 \iff 3x + 4 - 5 \leqslant 5 - 5 \iff 3x - 1 \leqslant 0$

**PROPRIÉTÉ** admise

- On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre **strictement positif**, en **conservant** le sens de l'inégalité. Autrement dit, pour tous réels $a$, $b$ et $c$, avec $c > 0$, on a :

$$a \leqslant b \iff a \times c \leqslant b \times c \quad \text{et} \quad a \leqslant b \iff \frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c}$$

- On peut multiplier ou diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre **strictement négatif**, en **changeant** le sens de l'inégalité. Autrement dit, pour tous réels $a$, $b$ et $c$, avec $c < 0$, on a :

$$a \leqslant b \iff a \times c \geqslant b \times c \quad \text{et} \quad a \leqslant b \iff \frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c}$$

**EXEMPLES**

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $3x \geqslant 5 \iff \dfrac{3x}{3} \geqslant \dfrac{5}{3} \iff x \geqslant \dfrac{5}{3}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{4}x < 3 \iff \dfrac{1}{4}x \times 4 < 3 \times 4 \iff x < 12$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $-5x \leqslant 2 \iff \dfrac{-5x}{-5} \geqslant \dfrac{2}{-5} \iff x \geqslant -\dfrac{2}{5}$.

**REMARQUE**

La démonstration de ces deux propriétés sera effectuée plus tard dans l'année, dans le chapitre sur les fonctions affines.

## 2) Définition et vocabulaire

**DÉFINITIONS**

- Une **inéquation** est une inégalité dans laquelle figurent une ou plusieurs inconnues désignées par des lettres.

- Une **solution** d'une inéquation d'inconnue $x$ est une valeur de $x$ pour laquelle l'inégalité est vraie.

- **Résoudre dans** $\mathbb{R}$ une inéquation, c'est déterminer toutes ses solutions réelles.

**EXEMPLE**

$2x - 3 \leqslant 5$ est une inéquation d'inconnue $x$.
Résoudre cette inéquation dans $\mathbb{R}$, c'est trouver toutes les valeurs réelles de $x$ telles que $2x - 3 \leqslant 5$.

$-2$ est par une exemple une des solutions de cette inéquation.
En effet, si $x = -2$, alors $2x - 3 = 2(-2) - 3 = -4 - 3 = -7$ et on a bien $-7 \leqslant 5$.

## 3) Inéquation du premier degré à une inconnue

**DÉFINITION**

Une inéquation du premier degré à une inconnue $x$ est une inéquation pouvant se ramener à la forme $ax + b \leqslant 0$, avec $a$ et $b$ des réels (et $a \neq 0$).

**REMARQUE**

La définition reste valable avec les signes $<$, $\geqslant$ et $>$.

**EXEMPLES**

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x - 4 \geqslant x + 6$.

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $4 + 3x < 5x - 1$.

**EXERCICE**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$7x + 1 \geqslant 2x - 4$ $\qquad$ $4(2x + 5) \leqslant 3 - 5x$ $\qquad$ $2x - 8 \leqslant -3x - 10$ $\qquad$ $-6x + 1 > 4x + 9$

## 4) Inéquation produit ou quotient

**PROPRIÉTÉ** admise

- Le produit ou le quotient de deux nombres réels non nuls et **de même signe** est **positif**.

- Le produit ou le quotient de deux nombres réels non nuls et **de signes contraires** est **négatif**.

**EXEMPLES**

$-4543,654 \times (-6) > 0$ et $654 \times (-34) < 0$.

## PROPRIÉTÉ admise

Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ des réels avec $a$ et $c$ différents de 0.

Pour résoudre une inéquation du type $(ax+b)(cx+d) \leqslant 0$ ou du type $\dfrac{ax+b}{cx+d} \leqslant 0$, on peut utiliser un tableau de signes.

## EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(x+1)(-2x+6) \leqslant 0$.

Pour résoudre ce type d'équation, on commence par déterminer séparément le signe des deux facteurs $(x+1)$ et $(-2x+6)$ :

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -1$
  $x+1 \leqslant 0 \iff x \leqslant -1$
  $x+1 = 0 \iff x = -1$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $-2x+6 \geqslant 0 \iff -2x \geqslant -6$
  $\iff \dfrac{-2x}{-2} \leqslant \dfrac{-6}{-2}$
  $\iff x \leqslant 3$

  $-2x+6 \leqslant 0 \iff -2x \leqslant -6$
  $\iff \dfrac{-2x}{-2} \geqslant \dfrac{-6}{-2}$
  $\iff x \geqslant 3$

  $-2x+6 = 0 \iff -2x = -6$
  $\iff \dfrac{-2x}{-2} = \dfrac{-6}{-2}$
  $\iff x = 3$.

On dresse alors un tableau récapitulatif de ces signes et on utilise la propriété vue au-dessus sur le signe d'un produit de facteurs :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $-2x+6$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(x+1)(-2x+6)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Conclusion :** les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(x+1)(-2x+6) \leqslant 0$ sont tous les réels de l'ensemble

$$\boxed{]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[}$$

On peut aussi écrire comme conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (x+1)(-2x+6) \leqslant 0 \iff x \in ]-\infty\,;-1] \cup [3\,;+\infty[}$$