Seconde – Chapitre 01

CALCUL NUMÉRIQUE

Table des matières

I Fractions et puissances

1) Fractions

PROPRIÉTÉS — admises

Soient a, b, c et d des nombres.

• L'écriture fractionnaire $\dfrac{a}{b}$ existe si $b \neq 0$.
On dit que a est le **numérateur** et b le **dénominateur**.

• Si a et b sont des entiers, avec $b \neq 0$, alors $\dfrac{a}{b}$ est une **fraction**.
Cette fraction est **irréductible** si a et b sont premiers entre eux.

• Pour simplifier une écriture fractionnaire ou modifier son dénominateur, on utilise la propriété, avec b et c non nuls :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

• On peut ajouter ou soustraire des écritures fractionnaires qui ont le même dénominateur : avec $d \neq 0$, on a :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

• On peut multiplier des écritures fractionnaires avec la propriété suivante (avec b et d non nuls) :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

• Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse (avec b, c et d non nuls) :

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

EXERCICE

• Simplifier : $A = \dfrac{49}{14}$; $B = \dfrac{-32}{-24}$

• Calculer : $C = \dfrac{5}{2} - \dfrac{4}{3}$; $D = 3 - \dfrac{2}{7}$; $E = \dfrac{14}{25} \times \dfrac{15}{28}$; $F = 15 \times \dfrac{2}{3}$; $G = \dfrac{\frac{3}{7}}{2}$; $H = \dfrac{\frac{4}{9}}{-\frac{2}{3}}$

2) Puissances entières

PROPRIÉTÉS admises

Soient a et b deux nombres et n un entier naturel non nul.

- $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (n facteurs égaux) • $a^1 = a$ • Si $a \neq 0$, $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
- Pour tous entiers n et p relatifs (positifs ou négatifs) :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \text{et} \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \text{ (avec } a \neq 0) \quad \text{et} \quad (a^n)^p = a^{n \times p}$$

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \text{ (avec } b \neq 0)$$

- $10^n = 100\ldots00$ (n zéros) et $10^{-n} = 0,00\ldots01$ (n zéros)

EXERCICE

- Calculer : $A = 3^3$ $B = (-4)^3$ $C = 0,2^3$ $D = 5^{-2}$ $E = 2^{-4}$
  $F = 2^7 \times 2^3$ $G = 8^{-7} \times 8$ $H = \dfrac{7^9}{7^4}$ $I = \dfrac{3^2}{3^{-6}}$ $J = \left(4^3\right)^5$ $K = 4^3 \times 25^3$
- Simplifier la fraction $L = \dfrac{2^{15} \times 3^6}{18^{12}}$.

II Racine carrée

1) Définition

DÉFINITION

Soit a un nombre **positif ou nul**. La **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre **positif ou nul** dont le carré est égal à a.

Autrement dit, pour tout nombre a positif ou nul, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

EXEMPLES

- $3^2 = 9$: autrement dit, 3 est le nombre positif dont le carré vaut $3^2 = 9$. Ainsi, $\sqrt{9} = 3$.
- $\sqrt{25} = 5$ car 5 est le nombre positif dont le carré vaut $5^2 = 25$.
- $\sqrt{1,44} = 1,2$ car $1,2$ est le nombre positif dont le carré vaut $1,2^2 = 1,44$.

REMARQUES

- -3 est aussi un nombre dont le carré vaut 9, mais il n'est pas positif. Ce n'est donc pas la racine carrée de 9.
- Certaines racines carrées ne peuvent pas s'écrire sous forme décimale. Par exemple, $\sqrt{2}$ est le nombre positif dont le carré vaut 2, mais on ne peut pas l'écrire autrement que $\sqrt{2}$.

2) Propriétés

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux nombres **positifs ou nuls**.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ (avec } b \neq 0)$$

EXEMPLES

$\sqrt{700} = \sqrt{7 \times 100} = \sqrt{7} \times \sqrt{100} = \sqrt{7} \times 10 = 10\sqrt{7}$; $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{18}{3}} = \sqrt{6}$

DÉMONSTRATION

On va démontrer que pour tous nombres a et b positifs ou nuls, on a bien $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

1ère étape : on commence par démontrer que pour tous nombres positifs ou nuls p et q, on a :

$$p^2 = q^2 \iff p = q$$

En effet, $p^2 = q^2 \iff p^2 - q^2 = 0 \iff (p-q)(p+q) = 0 \iff p - q = 0$ ou $p + q = 0 \iff p = q$ ou $p = -q$.
Or p et q sont positifs et donc de même signe, donc l'égalité $p = -q$ est impossible.
Donc on a bien, pour tous nombres positifs ou nuls p et q l'équivalence $p^2 = q^2 \iff p = q$.

2ème étape :
D'une part, $(\sqrt{a \times b})^2 = a \times b$.
D'autre part, $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = a \times b$.
Or d'après l'étape 1, puisque $(\sqrt{a \times b})^2 = (\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2$, on a bien $\boxed{\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$

REMARQUE

Attention : sauf exception, l'égalité $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ est **fausse**.

En effet, $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ mais $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$.

De même avec l'égalité $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

EXERCICE

- Donner l'écriture décimale de : $\sqrt{49}$ $\quad \sqrt{0,25}$ $\quad \sqrt{\dfrac{9}{4}}$ $\quad \sqrt{900}$
- Simplifier les écritures de : $\sqrt{810}$ $\quad \sqrt{18}$ $\quad \sqrt{32}$ $\quad 8\sqrt{12} - 4\sqrt{75}$
- Écrire sans racine carrée au dénominateur : $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ $\quad \dfrac{10}{\sqrt{5}}$
- Écrire $A = 7\sqrt{45} - 6\sqrt{20} + \sqrt{5}$ sous la forme $a\sqrt{5}$ avec a un nombre entier.