Première – Chapitre 09

VARIABLE ALÉATOIRE

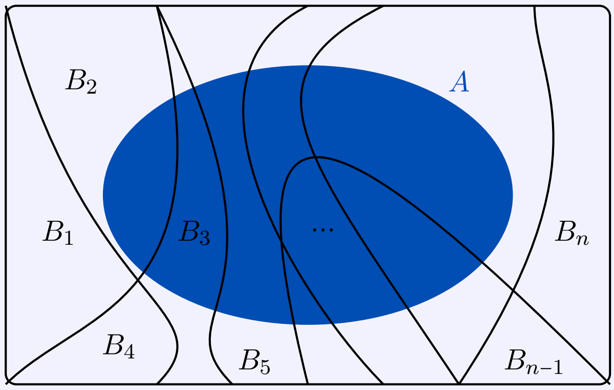

Table des matières

I Variable aléatoire et loi de probabilité **2**
1) Loi de probabilité 2
2) Exemple complet 2

II Espérance, variance et écart-type **3**
1) Espérance 3
2) Variance et écart-type 4

Dans ce chapitre, n et i désignent des entiers naturels.

I Variable aléatoire et loi de probabilité

DÉFINITION

Lorsqu'à chaque issue d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

REMARQUES

- Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule : X, Y, Z, T, G...
- Lorsque x_1, x_2, ..., x_n sont les valeurs prises par une variable aléatoire X, on note $X = x_i$ l'événement « X prend la valeur x_i » (avec $1 \leqslant i \leqslant n$)

1) Loi de probabilité

DÉFINITION

Lorsqu'à chaque valeur x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité de l'événement $X = x_i$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité de** X.
On représente généralement cette loi à l'aide d'un tableau :

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

REMARQUE

On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

2) Exemple complet

Énoncé :
On lance un dé cubique, non pipé, dont les faces sont numérotées 1, 1, 1, 2, 3 et 4.
Soit X la variable aléatoire donnant le numéro apparu. Déterminer la loi de probabilité de X.

Correction :
Les valeurs prises par X sont 1, 2, 3 et 4.
Le dé étant non pipé, chaque face a la même probabilité d'être obtenue. 3 faces ayant le chiffre 1, on a donc $P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
De même, $P(X = 2) = \frac{1}{6}$, $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 4) = \frac{1}{6}$.
La loi de probabilité de X est donc :

Valeur x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

II Espérance, variance et écart-type

Dans toute cette partie, on appelle X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n.

1) Espérance

a Définition

DÉFINITION

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre **réel** noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

avec pour tout entier i compris entre 1 et n, $p_i = P(X = x_i)$.

REMARQUE

L'espérance mathématique peut être interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.

REMARQUE

Si X est une variable aléatoire égale à un gain algébrique dans une expérience aléatoire représentant un jeu, alors :
- Si $E(X) > 0$, alors le jeu est dit favorable au joueur (et défavorable à l'organisateur).
- Si $E(X) < 0$, alors le jeu est dit défavorable au joueur (et favorable à l'organisateur).
- Si $E(X) = 0$, alors le jeu est dit équitable.

b Linéarité de l'espérance

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

DÉMONSTRATION

Si X prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n, alors $aX + b$ prend les valeurs $ax_1 + b$, $ax_2 + b$, ..., $ax_n + b$ et on a :

$\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n$, $X = x_i \Leftrightarrow aX + b = ax_i + b$ d'où $P(aX + b = ax_i + b) = P(X = x_i)$.

Ainsi, en posant $p_i = P(X = x_i)$, on a :

$$E(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) P(aX + b = ax_i + b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b) p_i = \sum_{i=1}^{n} a x_i p_i + \sum_{i=1}^{n} b p_i = a \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + b \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Or $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Donc $E(aX + b) = aE(X) + b$.

2) Variance et écart-type

a Définitions

DÉFINITION

La variance de la loi de probabilité de X est le nombre réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$$

REMARQUE

La variance de X est la moyenne des carrés des écarts des valeurs de X à l'espérance de X.
On a ainsi : $V(X) = E((X - E(X))^2)$.

DÉFINITION

L'écart-type de la loi de probabilité de X est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

b Deux propriétés de la variance

PROPRIÉTÉ

Soit X une variable aléatoire. Alors on a la **Formule de König-Huyghens** :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

DÉMONSTRATION

$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i^2 - 2x_iE(X) + E(X)^2) = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - 2E(X)\sum_{i=1}^{n} p_ix_i + E(X)^2\sum_{i=1}^{n} p_i$.

Or $\sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 = E(X^2)$; $\sum_{i=1}^{n} p_ix_i = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Donc $V(X) = E(X^2) - 2E(X)^2 + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$V(aX + b) = a^2V(X) \qquad \text{et} \qquad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
V(aX+b) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i+b-E(aX+b))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i+b-(aE(X)+b))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i-aE(X))^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i a^2(x_i-E(X))^2 \\
&= a^2\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2 \\
&= a^2V(X)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(aX+b) &= \sqrt{V(aX+b)} \\
&= \sqrt{a^2V(X)} \\
&= |a|\sqrt{V(X)} \\
&= |a|\sigma(X)
\end{aligned}$$