Première – Chapitre 08

FONCTION EXPONENTIELLE

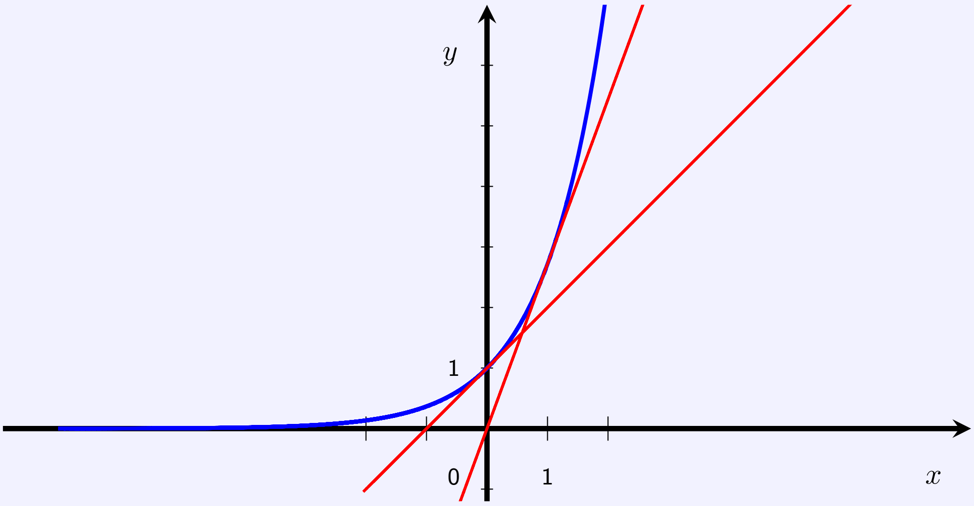


Table des matières

I La fonction exponentielle **2**
1) Définition de la fonction exponentielle 2
2) Une première propriété de la fonction exponentielle 2
3) Relation fonctionnelle 3
4) Signe de la fonction exp 3
5) Propriétés algébriques de la fonction exp 3
6) Nouvelle notation 4

II Étude de la fonction exponentielle **5**
1) Sens de variation de la fonction exp 5
2) Limites de la fonction exp 5
3) Courbe représentative de la fonction exp 6

III Compléments sur la fonction exponentielle **6**
1) Dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$ 6
2) Représentations des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$ 7
3) Étude de la suite géométrique (e^{na}) 8

I La fonction exponentielle

1) Définition de la fonction exponentielle

Notation : On notera l'égalité $f(x) = g(x)$, pour tout x réel, sous la forme réduite $f = g$.

PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION admise

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
C'est la **fonction exponentielle**, notée **exp**.

REMARQUE

En utilisant la notation exp, on peut donc dire que :
- Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- $\exp(0) = 1$.

2) Une première propriété de la fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Autrement dit, pour tout réel x, $\exp(x) \neq 0$.

DÉMONSTRATION

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$.
φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) &= \exp'(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times (-\exp'(-x)) && (f(ax+b))' = a \times f'(ax+b), \text{ chap. 4} \\ &= \exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x) && \text{car } \exp' = \exp \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on remarque que la fonction φ' est la fonction nulle, donc φ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
Cherchons la constante en question.
$\varphi(0) = \exp(0) \times \exp(-0) = 1 \times 1 = 1$, donc pour tout nombre réel x, $\varphi(x) = 1$ et ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \times \exp(-x) = 1$$

Supposons alors qu'il existe un réel x_0 tel que $\exp(x_0) = 0$.
Alors, d'après la formule obtenue au-dessus, on aurait : $\exp(x_0) \times \exp(-x_0) = 1$, soit $0 \times \exp(-x_0) = 1$, soit enfin $0 = 1$! Ce qui est absurde.

Donc pour tout nombre réel x, $\exp(x) \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \times \exp(-x) = 1$, donc en transposant à droite $\exp(x)$ (possible car on vient de voir que la fonction exp ne s'annulait pas sur $\mathbb{R}$), on a alors la conséquence immédiate suivante :

PROPRIÉTÉ

Pour tout nombre réel x,

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

3) Relation fonctionnelle

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

REMARQUE

On dit que la fonction exponentielle transforme une somme en un produit.

DÉMONSTRATION

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ (φ existe car $\exp \neq 0$ sur $\mathbb{R}$)

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = \dfrac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$ (car $\exp' = \exp$)

Donc φ est constante sur $\mathbb{R}$.

Or $\varphi(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$ donc pour tout x réel, $\varphi(x) = \exp(y)$, soit $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$, donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

REMARQUE

On retrouve la propriété vue dans le 2), à savoir $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.

En effet, d'après la relation fonctionnelle vue ci-dessus, on a, en remplaçant y par $-x$:

$\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0)$.

Or d'après la définition de la fonction exponentielle du 1), on a $\exp(0) = 1$.

Ainsi, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$, puis $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ (car $\exp \neq 0$).

4) Signe de la fonction exp

PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

Pour tout nombre réel x, d'après la relation fonctionnelle, on a : $\exp(x) = \exp\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant 0$.

Or la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc pour tout nombre réel x, $\exp(x) > 0$.

5) Propriétés algébriques de la fonction exp

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

DÉMONSTRATION

Pour tous nombres réels x et y, $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y)$ d'après la relation fonctionnelle. Or $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$, donc $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

REMARQUE

On peut généraliser la relation fonctionnelle à plus de deux termes :
Pour tous réels x_1, x_2, ... , x_n ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)$$

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombre réel x et tout nombre entier relatif n, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

DÉMONSTRATION

- Lorsque $n > 0$, on obtient l'égalité en appliquant la propriété précédente dans le cas particulier où $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$.
- Lorsque $n = 0$, l'égalité est vérifiée car $\exp(0) = 1$.
- Lorsque $n < 0$, $\exp(nx) = \exp((-n)(-x))$. Or $-n > 0$ donc d'après le premier cas, $\exp(nx) = (\exp(-x))^{-n}$. Donc $\exp(nx) = \left(\dfrac{1}{\exp(x)}\right)^{-n} = (\exp(x))^n$.

6) Nouvelle notation

Posons $\mathrm{e} = \exp(1)$ et avec la calculatrice, $\mathrm{e} \approx 2,718$.

Pour tout nombre entier relatif n, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = \mathrm{e}^n$.
Par extension, on peut noter pour tout nombre réel x, $\exp(x) = \mathrm{e}^x$ (lire « *e* exposant x »)
On définit ainsi n'importe quelle puissance **RÉELLE** du nombre e.

PROPRIÉTÉ — admise

Nouvelles écritures des propriétés :
Pour tous nombres réels x et y et tout nombre entier relatif n, on a :

$\mathrm{e}^0 = 1$ $\quad$ $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ $\quad$ $\mathrm{e}^x > 0$ $\quad$ $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ $\quad$ $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$ $\quad$ $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$ $\quad$ $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$

REMARQUE

On retrouve les propriétés habituelles de calcul sur les puissances entières d'un réel vues au collège.

EXERCICE

Simplifier les écritures suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x+2} \times \mathrm{e}^{-x+2}$.
2. $\dfrac{\mathrm{e}^{-2x+1}}{\mathrm{e}^{-x+1}}$.
3. $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} + \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - 1}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$

II Étude de la fonction exponentielle

1) Sens de variation de la fonction exp

PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$. Or pour tout nombre réel x, $\exp(x) > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La propriété ci-dessus permet d'établir une conséquence immédiate :

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels a et b :

$$\mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b \iff a < b \qquad\qquad \mathrm{e}^a = \mathrm{e}^b \iff a = b$$

EXERCICE

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $(E_1) : \mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^2$
2. $(E_2) : \mathrm{e}^{5x+2} - 1 = 0$
3. $(E_3) : \mathrm{e}^{5x+2} + 1 = 0$
4. $(I_1) : \mathrm{e}^{3x+1} - \mathrm{e}^{-x} < 0$
5. $(I_2) : \mathrm{e}^{3x+1} + \mathrm{e}^{-x} < 0$
6. $(I_3) : \mathrm{e}^{5-2x} + 2 \geqslant 0$
7. $(I_4) : -2\,\mathrm{e}^{3x} - 2\,\mathrm{e} \geqslant 0$
8. $(I_5) : -2\,\mathrm{e}^{3x} + 2\,\mathrm{e} \geqslant 0$
9. $(E_4) : \mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x = 3$

2) Limites de la fonction exp

PROPRIÉTÉ admise

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

REMARQUE

Ces limites ne sont pas à retenir en classe de 1ère.

3) Courbe représentative de la fonction exp

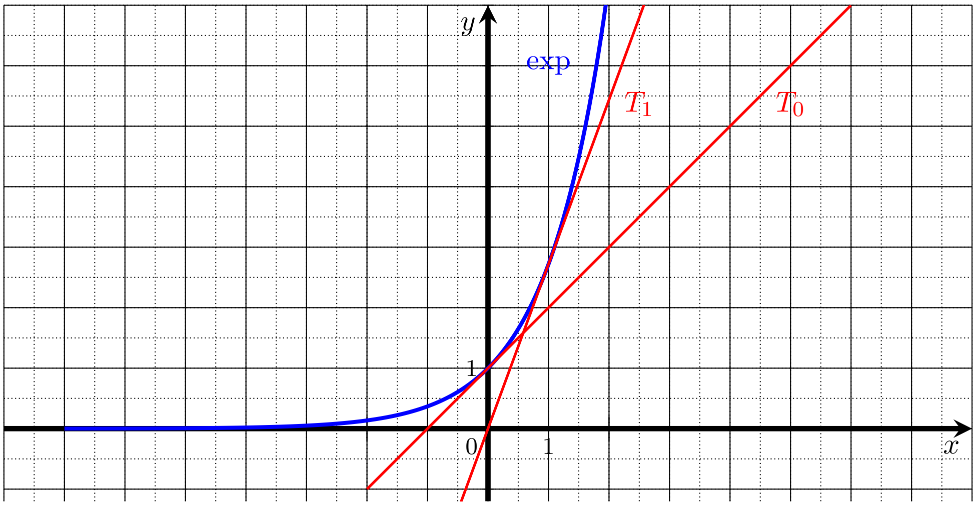
Tableau de variations détaillé de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'(x)$				$+$			
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

EXERCICE

1. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe de la fonction exp au point d'abscisse 0. (*réponse* : $y = x+1$).
2. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe de la fonction exp au point d'abscisse 1. (*réponse* : $y = \mathrm{e}\,x$).

Courbe représentative de la fonction exponentielle :



REMARQUE

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de exp en $-\infty$.

III Compléments sur la fonction exponentielle

1) Dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{ax+b}$

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels.
Alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax+b}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, $f'(x) = a \times \mathrm{e}^{ax+b}$.

DÉMONSTRATION

Le résultat est immédiat d'après la propriété du chapitre IV, qui donne la dérivée de $f(ax+b)$: $a \times f(ax+b)$.

REMARQUE

On peut généraliser la propriété précédente en remplaçant la fonction affine $x \mapsto ax+b$ par une fonction dérivable u :

PROPRIÉTÉ — admise

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
alors la fonction e^u est définie et dérivable sur I et $(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x+1}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^{x^2+3x+1}$.

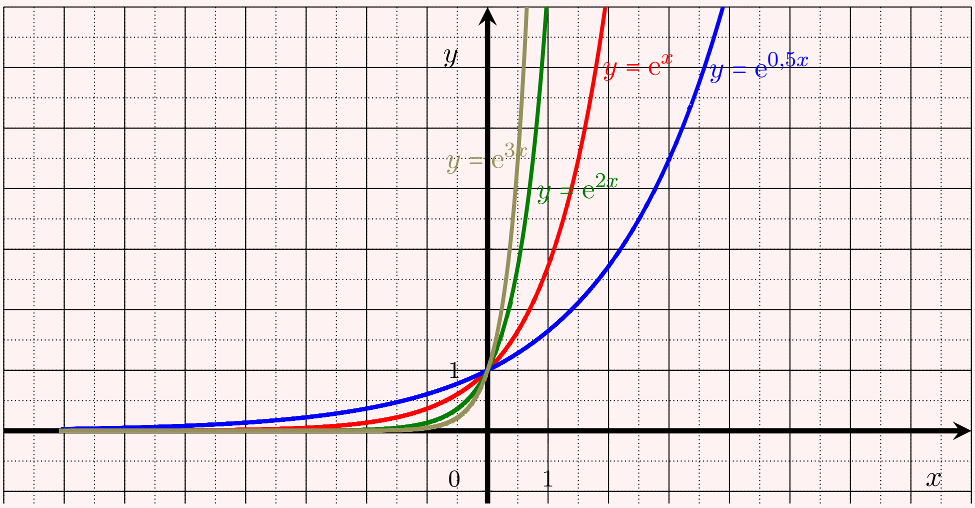
DÉMONSTRATION

Ce résultat sera démontré en classe de Terminale.

2) Représentations des fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$

PROPRIÉTÉ

Soit k un réel **strictement positif**.
Alors les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, et ont pour représentation graphique :



REMARQUES

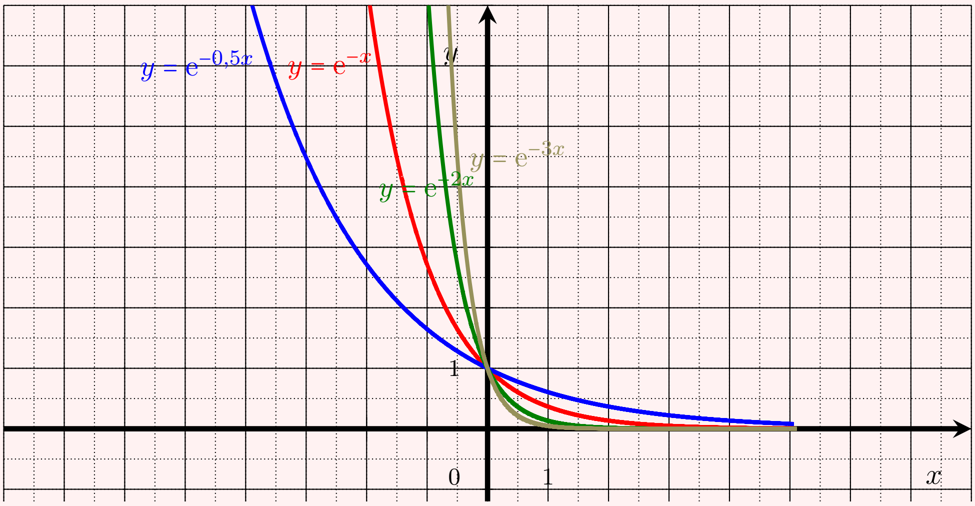
- On parle de **croissance exponentielle**.
- Plus la valeur de k est grande, plus la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{kt}$ croit rapidement.

DÉMONSTRATION

Soit k un réel strictement positif, et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{kt}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = k \times \mathrm{e}^{kt}$.
Or $k > 0$ et pour tout réel t, $\mathrm{e}^{kt} > 0$ (car la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$).
Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) > 0$ et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

PROPRIÉTÉ

Soit k un réel **strictement positif**.
Alors les fonctions $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$ sont strictement décroissantes sur $\mathbb{R}$, et ont pour représentation graphique :



REMARQUES

- On parle de **décroissance exponentielle**.
- Plus la valeur de k est grande, plus la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-kt}$ décroit rapidement.

DÉMONSTRATION

Soit k un réel strictement positif, et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \mathrm{e}^{-kt}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -k \times \mathrm{e}^{-kt}$.
Or $k > 0$, donc $-k < 0$ et pour tout réel t, $\mathrm{e}^{-kt} > 0$ (car la fonction exp est strictement positive sur $\mathbb{R}$).
Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) < 0$ et donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3) Étude de la suite géométrique (e^{na})

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel a, la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \mathrm{e}^{na}$ est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme $u_0 = 1$.

DÉMONSTRATION

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)a} = \mathrm{e}^{na+a} = \mathrm{e}^{na} \times \mathrm{e}^a = u_n \times \mathrm{e}^a$
Donc (u_n) est bien une suite géométrique de raison $q = \mathrm{e}^a$ et de premier terme $u_0 = \mathrm{e}^{0\times a} = \mathrm{e}^0 = 1$.