

Première – Chapitre 08

FONCTION EXPONENTIELLE

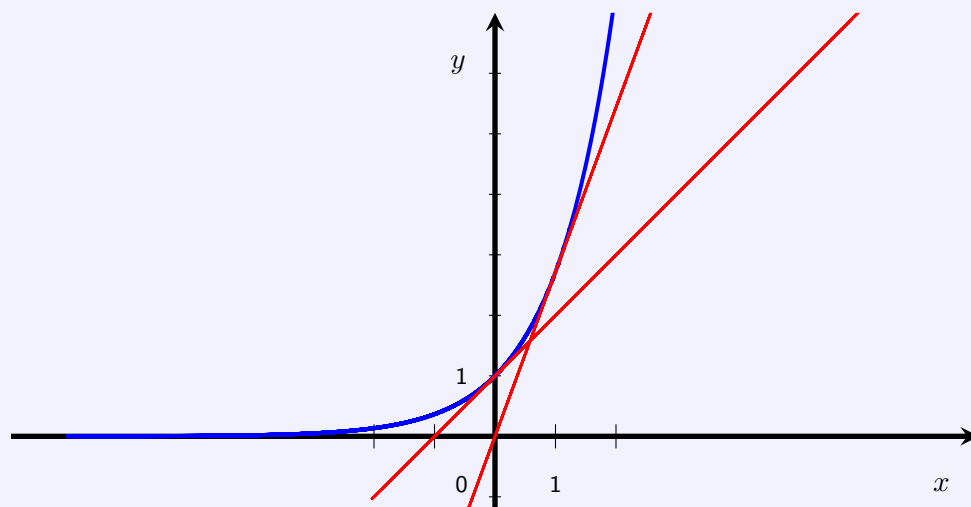


Table des matières

| | | |
|------------|---|----------|
| I | La fonction exponentielle | 2 |
| 1) | Définition de la fonction exponentielle | 2 |
| 2) | Une première propriété de la fonction exponentielle | 2 |
| 3) | Relation fonctionnelle | 3 |
| 4) | Signe de la fonction exp | 3 |
| 5) | Propriétés algébriques de la fonction exp | 3 |
| 6) | Nouvelle notation | 4 |
| II | Étude de la fonction exponentielle | 5 |
| 1) | Sens de variation de la fonction exp | 5 |
| 2) | Limites de la fonction exp | 5 |
| 3) | Courbe représentative de la fonction exp | 5 |
| III | Compléments sur la fonction exponentielle | 6 |
| 1) | Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ | 6 |
| 2) | Représentations des fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$ | 7 |
| 3) | Étude de la suite géométrique (e^{na}) | 8 |

I La fonction exponentielle

1) Définition de la fonction exponentielle

Notation : On notera l'égalité $f(x) = g(x)$, pour tout x réel, sous la forme réduite $f = g$.

PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION

admise

Il existe une unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
C'est la **fonction exponentielle**, notée **exp**.

REMARQUE

En utilisant la notation **exp**, on peut donc dire que :

- Pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$.
- $\exp(0) = 1$.

2) Une première propriété de la fonction exponentielle

PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle ne s'annule pas sur \mathbb{R} .
Autrement dit, pour tout réel x , $\exp(x) \neq 0$.

DÉMONSTRATION

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$.

φ est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) &= \exp'(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times (-\exp'(-x)) \\ &= \exp(x) \exp(-x) - \exp(x) \exp(-x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$(f(ax+b))' = a \times f'(ax+b), \text{ chap. 4} \\ \text{car } \exp' = \exp$$

Ainsi, on remarque que la fonction φ' est la fonction nulle, donc φ est une fonction constante sur \mathbb{R} .
Cherchons la constante en question.

$\varphi(0) = \exp(0) \times \exp(-0) = 1 \times 1 = 1$, donc pour tout nombre réel x , $\varphi(x) = 1$ et ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \times \exp(-x) = 1$$

Supposons alors qu'il existe un réel x_0 tel que $\exp(x_0) = 0$.

Alors, d'après la formule obtenue au-dessus, on aurait : $\exp(x_0) \times \exp(-x_0) = 1$, soit $0 \times \exp(-x_0) = 1$,
soit enfin $0 = 1$! Ce qui est absurde.

Donc pour tout nombre réel x , $\exp(x) \neq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \times \exp(-x) = 1$, donc en transposant à droite $\exp(x)$ (possible car on vient de voir que la fonction \exp ne s'annulait pas sur \mathbb{R}), on a alors la conséquence immédiate suivante :

PROPRIÉTÉ

Pour tout nombre réel x ,

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

3) Relation fonctionnelle

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels x et y , $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

REMARQUE

On dit que la fonction exponentielle transforme une somme en un produit.

DÉMONSTRATION

Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ (φ existe car $\exp \neq 0$ sur \mathbb{R})

φ est dérivable sur \mathbb{R} et $\varphi'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$ (car $\exp' = \exp$)

Donc φ est constante sur \mathbb{R} .

Or $\varphi(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$ donc pour tout x réel, $\varphi(x) = \exp(y)$, soit $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$, donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

REMARQUE

On retrouve la propriété vue dans le 2), à savoir $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

En effet, d'après la relation fonctionnelle vue ci-dessus, on a, en remplaçant y par $-x$: $\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0)$.

Or d'après la définition de la fonction exponentielle du 1), on a $\exp(0) = 1$.

Ainsi, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$, puis $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (car $\exp \neq 0$).

4) Signe de la fonction exp

PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle est strictement positive sur \mathbb{R} .

DÉMONSTRATION

Pour tout nombre réel x , d'après la relation fonctionnelle, on a : $\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geq 0$.

Or la fonction exponentielle ne s'annule pas sur \mathbb{R} , donc pour tout nombre réel x , $\exp(x) > 0$.

5) Propriétés algébriques de la fonction exp

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels x et y , $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

DÉMONSTRATION

Pour tous nombres réels x et y , $\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \times \exp(-y)$ d'après la relation fonctionnelle. Or $\exp(-y) = \frac{1}{\exp(y)}$, donc $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

REMARQUE

On peut généraliser la relation fonctionnelle à plus de deux termes :

Pour tous réels x_1, x_2, \dots, x_n ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)$$

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombre réel x et tout nombre entier relatif n , $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

DÉMONSTRATION

- Lorsque $n > 0$, on obtient l'égalité en appliquant la propriété précédente dans le cas particulier où $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$.

- Lorsque $n = 0$, l'égalité est vérifiée car $\exp(0) = 1$.

- Lorsque $n < 0$, $\exp(nx) = \exp((-n)(-x))$. Or $-n > 0$ donc d'après le premier cas, $\exp(nx) = (\exp(-x))^{-n}$. Donc $\exp(nx) = \left(\frac{1}{\exp(x)}\right)^{-n} = (\exp(x))^n$.

6) Nouvelle notation

Posons $e = \exp(1)$ et avec la calculatrice, $e \approx 2,718$.

Pour tout nombre entier relatif n , $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$.

Par extension, on peut noter pour tout nombre réel x , $\exp(x) = e^x$ (lire « e exposant x »)

On définit ainsi n'importe quelle puissance **RÉELLE** du nombre e .

PROPRIÉTÉ

admise

Nouvelles écritures des propriétés :

Pour tous nombres réels x et y et tout nombre entier relatif n , on a :

$$e^0 = 1 \quad e^1 = e \quad e^x > 0 \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x+y} = e^x \times e^y \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (e^x)^n = e^{nx}$$

REMARQUE

On retrouve les propriétés habituelles de calcul sur les puissances entières d'un réel vues au collège.

EXERCICE

Simplifier les écritures suivantes :

1. $e^{x+2} \times e^{-x+2}$.
2. $\frac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}$.
3. $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$

II Étude de la fonction exponentielle

1) Sens de variation de la fonction exp

PROPRIÉTÉ

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et $\exp' = \exp$. Or pour tout nombre réel x , $\exp(x) > 0$ donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

La propriété ci-dessus permet d'établir une conséquence immédiate :

PROPRIÉTÉ

Pour tous nombres réels a et b :

$$e^a < e^b \iff a < b$$

$$e^a = e^b \iff a = b$$

EXERCICE

Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1. $e^{-x} + 1 = 0$
2. $e^{2x+3} - 1 = 0$
3. $e^{3x+1} - e^{-x} < 0$
4. $e^{2x} + 2e^x = 3$ (*changement de variable $X = e^x$*)

2) Limites de la fonction exp

PROPRIÉTÉ

admise

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

REMARQUE

Ces limites ne sont pas à retenir en classe de 1^{ère}.

3) Courbe représentative de la fonction exp

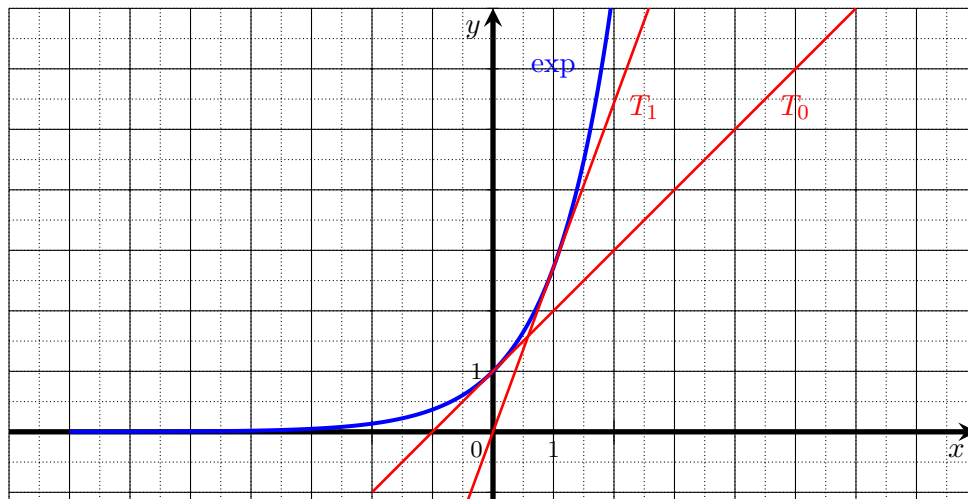
Tableau de variations détaillé de la fonction exponentielle :

| | |
|--------------|---------------------------|
| x | $-\infty$ 0 1 $+\infty$ |
| $(\exp)'(x)$ | + |
| exp | |

EXERCICE

- Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe de la fonction \exp au point d'abscisse 0.
(réponse : $y = x + 1$).
- Déterminer l'équation de la tangente T_1 à la courbe de la fonction \exp au point d'abscisse 1.
(réponse : $y = ex$).

Courbe représentative de la fonction exponentielle :



REMARQUE

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de \exp en $-\infty$.

III Compléments sur la fonction exponentielle

1) Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$

PROPRIÉTÉ

Soient a et b deux réels.

Alors la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{ax+b}$ et est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x ,
 $f'(x) = a \times e^{ax+b}$.

DÉMONSTRATION

Le résultat est immédiat d'après la propriété du chapitre IV, qui donne la dérivée de $f(ax + b)$:
 $a \times f(ax + b)$.

REMARQUE

On peut généraliser la propriété précédente en remplaçant la fonction affine $x \mapsto ax + b$ par une fonction dérivable u :

PROPRIÉTÉ

admise

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .
alors la fonction e^u est définie et dérivable sur I et $(e^u)' = u' e^u$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{x^2+3x+1}$.

Alors f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x+1}$.

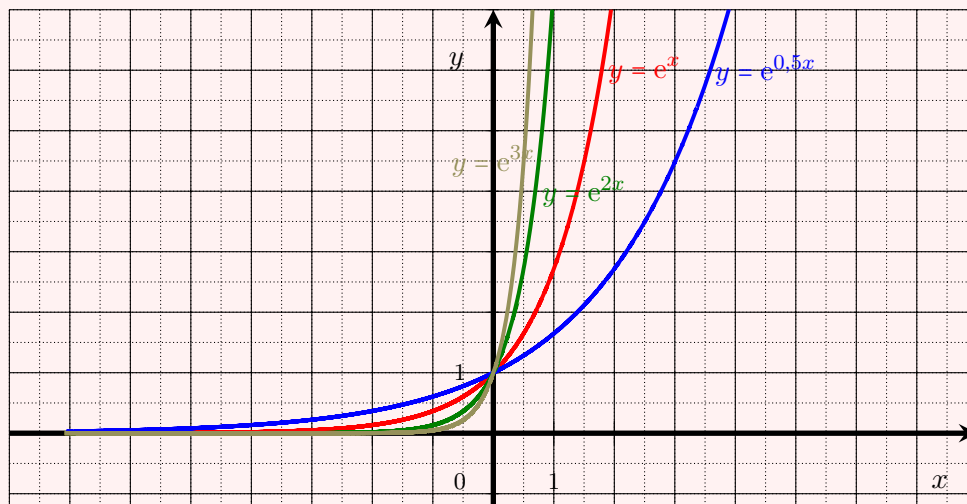
DÉMONSTRATION

Ce résultat sera démontré en classe de Terminale.

2) Représentations des fonctions $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$ **PROPRIÉTÉ**

Soit k un réel **strictement positif**.

Alors les fonctions $t \mapsto e^{kt}$ sont strictement croissantes sur \mathbb{R} , et ont pour représentation graphique :

**REMARQUES**

- On parle de **croissance exponentielle**.
- Plus la valeur de k est grande, plus la fonction $t \mapsto e^{kt}$ croît rapidement.

DÉMONSTRATION

Soit k un réel strictement positif, et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = e^{kt}$.

f est dérivable sur \mathbb{R} , et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = k \times e^{kt}$.

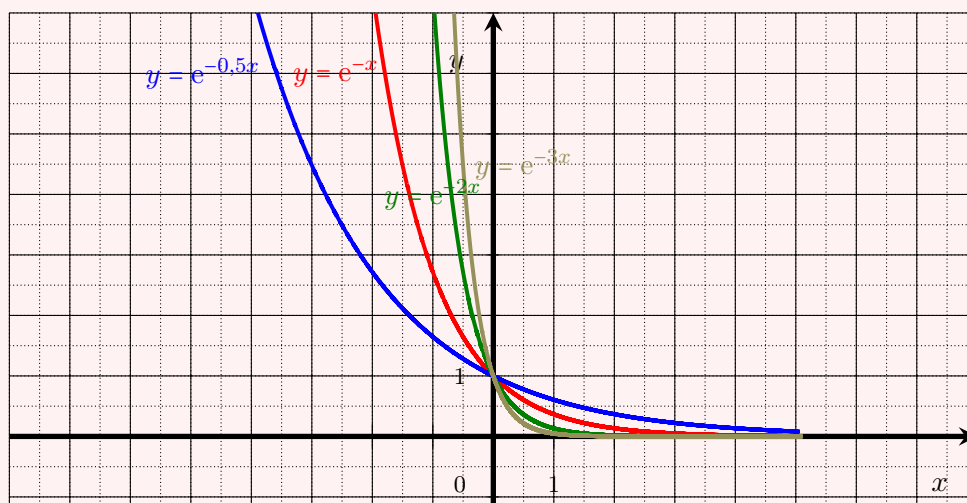
Or $k > 0$ et pour tout réel t , $e^{kt} > 0$ (car la fonction exp est strictement positive sur \mathbb{R}).

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) > 0$ et donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

PROPRIÉTÉ

Soit k un réel **strictement positif**.

Alors les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ sont strictement décroissantes sur \mathbb{R} , et ont pour représentation graphique :

**REMARQUES**

- On parle de **décroissance exponentielle**.
- Plus la valeur de k est grande, plus la fonction $t \mapsto e^{-kt}$ décroît rapidement.

DÉMONSTRATION

Soit k un réel strictement positif, et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = e^{-kt}$.

f est dérivable sur \mathbb{R} , et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = -k \times e^{-kt}$.

Or $k > 0$, donc $-k < 0$ et pour tout réel t , $e^{-kt} > 0$ (car la fonction exp est strictement positive sur \mathbb{R}).

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'(t) < 0$ et donc f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

3) Étude de la suite géométrique (e^{na}) **PROPRIÉTÉ**

Pour tout réel a , la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = e^{na}$ est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme $u_0 = 1$.

DÉMONSTRATION

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na} \times e^a = u_n \times e^a$$

Donc (u_n) est bien une suite géométrique de raison $q = e^a$ et de premier terme $u_0 = e^{0 \times a} = e^0 = 1$.