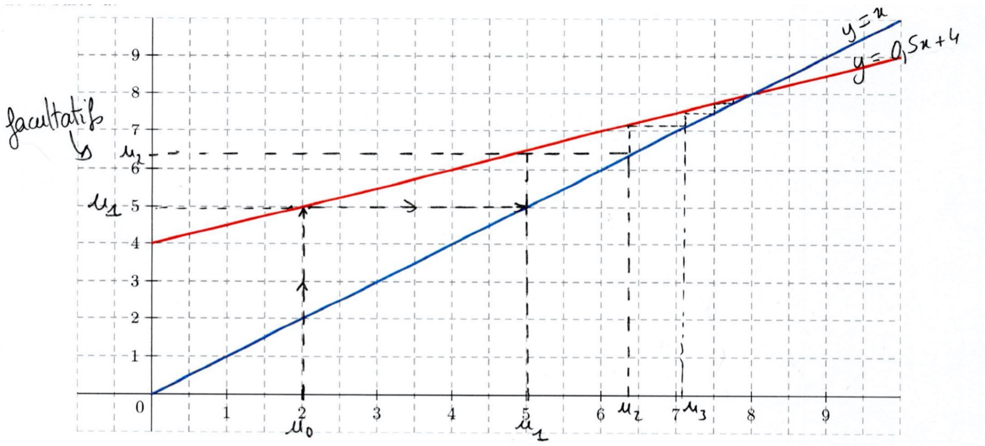
Exercice 1 Clientèle

1. u_0 est le nombre de centaines de clients à l'année $2018+0$, soit en 2018. D'après l'énoncé, il y a 200 clients en 2018, donc en centaines, cela donne $u_0 = 2$.

2. u_n est le nombre de centaines de clients à l'année $2018+n$ et u_{n+1} le nombre l'année suivante ; chaque année, 50% des clients restent chez ce fournisseur (d'où le $0,5u_n$), auxquels s'ajoutent 400 nouveaux clients (d'où le $+4$).
Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,5u_n + 4$.

3. On obtient :



4. Les droites ayant pour équations $y = x$ et $y = f(x)$, déterminer l'abscisse de leur point d'intersection revient à résoudre l'équation $f(x) = x$:
$f(x) = x \iff 0,5x + 4 = x \iff 0,5x = 4 \iff x = 8$
Puisque le point appartient à la droite d'équation $y = x$, son ordonnée est également 8.
Les coordonnées du point d'intersection des deux droites sont donc $(8;8)$.

5. Graphiquement, on peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et tend vers 8.

6. (a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 8$
$= 0,5u_n + 4 - 8$
$= 0,5u_n - 4.$
Or $v_n = u_n - 8$ donc $u_n = v_n + 8$
Ainsi, $v_{n+1} = 0,5(v_n + 8) - 4$
$= 0,5v_n + 4 - 4$
$= 0,5v_n$
Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 8 = 2 - 8 = -6$.

   (b) Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = -6 \times 0,5^n$.
Or $u_n = v_n + 8$, donc $u_n = 8 - 6 \times 0,5^n$.

   (c) **Sens de variation de (u_n) en fonction de celui de (v_n) :**
La suite (v_n) est une suite géométrique dont la raison $0,5$ est comprise entre 0 et 1, et dont le premier terme -6 est négatif. Donc (propriété du cours) (v_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.
Or pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 8$, donc les suites (u_n) et (v_n) ont le même sens de variations (en effet, ajouter 8 à chaque terme « incrémentent » les valeurs de 8 mais cela ne change pas le sens de variations).
Donc (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

Autre méthode, plus directe et sans passer par la suite auxiliaire :

Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = (8 - 6 \times 0,5^{n+1}) - (8 - 6 \times 0,5^n)$

$$\begin{aligned} &= -6 \times 0,5^{n+1} + 6 \times 0,5^n \\ &= 6 \times 0,5^n(-0,5+1) \\ &= 6 \times 0,5^n \times 0,5 \\ &= 3 \times 0,5^n > 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

7. Pour tout entier naturel n, $u_n = 8 - 6 \times 0,5^n$.
   Or $-1 < 0,5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n = 0$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-6 \times 0,5^n) = 0$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (8 - 6 \times 0,5^n) = 8$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 8$.

   On peut donc conclure que le nombre de clients du fournisseur se rapprochera, année après année, de 800 clients (stabilisation).

Exercice 2 Entreprise

1. u_0 est le nombre d'employés de l'entreprise au premier janvier de l'année $2018 + 0$, soit 2018.
   Donc d'après l'énoncé, $u_0 = 1500$.
   u_n est le nombre d'employés à l'année $2018 + n$ et u_{n+1} le nombre l'année suivante ; chaque année, 10% des employés partent à la retraite (soit un coefficient multiplicateur de $1 - \dfrac{10}{100} = 0,9$, d'où le $0,9u_n$), auxquels s'ajoutent 100 nouveaux employés (d'où le +100).
   Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 100$.

2. (a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1} - 1000$

   $$\begin{aligned} &= 0,9u_n + 100 - 1000 \\ &= 0,9u_n - 900. \end{aligned}$$

   Or $v_n = u_n - 1000$ donc $u_n = v_n + 1000$

   $$\begin{aligned} \text{Ainsi, } v_{n+1} &= 0,9(v_n + 1000) - 900 \\ &= 0,9v_n + 900 - 900 \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1000 = 1500 - 1000 = 500$.

   (b) Ainsi, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n = 500 \times 0,9^n$.
   Or $u_n = v_n + 1000$, donc $u_n = 1000 + 500 \times 0,9^n$.

   (c) Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = (1000 + 500 \times 0,9^{n+1}) - (1000 + 500 \times 0,9^n)$

   $$\begin{aligned} &= 500 \times 0,9^{n+1} - 500 \times 0,9^n \\ &= 500 \times 0,9^n(0,9 - 1) \\ &= 500 \times 0,9^n \times (-0,1) \\ &= -50 \times 0,9^n < 0 \end{aligned}$$

   Donc (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

   (d) $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 500 \times 0,9^n = 0$
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1000 + 500 \times 0,9^n) = 1000$

   On peut donc conclure que le nombre d'employés se rapprochera, année après année, de 1000 employés (stabilisation).

Exercice 3 Attention au premier terme

Cet exercice ressemble beaucoup au précédent, et j'espère que vous commencez à vous dire « Bon, c'est tout le temps la même chose, ses exos... ». Si c'est le cas, tant mieux ! Ce genre d'exercices étant tellement courant au bac, c'est une très bonne chose si vous les maitrisez.
Cependant, il y a une subtilité ici, qu'on retrouve parfois en DST ou au BAC : la suite n'est pas définie dès le rang 0 mais à partir du rang 1. Conséquence : les formules explicites sont un peu modifiées (reprenez votre cours si besoin : attendez vous, pour une suite géométrique, à voir apparaitre dans la formule explicite q^{n-1} au lieu de q^n ;-))

1. A l'aide d'un tableur, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante et converge vers $\frac{3}{2}$.
(Attention, n'oubliez pas que la suite ne commence qu'au rang 1 : il faut adapter votre tableur en ne faisant commencer n qu'à 1, au lieu de 0 ! N'hésitez pas à utiliser un ***approx*** *pour mieux conjecturer)*

	A n	B u	C u_approx	D u_explicite	E	F	G	H	I	J	K	L	M
=			=approx(b[])										
1	0	_	_	_									
2	1	3	3.	3									
3	2	2	2.	2									
4	3	5/3	1.66667	5/3									
5	4	14/9	1.55556	14/9									
6	5	41/27	1.51852	41/27									
7	6	122/81	1.50617	122/81									
8	7	365/243	1.50206	365/243									
9	8	1094/729	1.50069	1094/729									
10	9	3281/21...	1.50023	3281/2187									
11	10	9842/65...	1.50008	9842/6561									
12	11	29525/1...	1.50003	29525/19683									
13	12	88574/5...	1.50001	88574/59049									
14	13	265721/...	1.5	265721/177...									
15	14	797162/...	1.5	797162/531...									
16	15	2391485...	1.5	2391485/15...									
17	16	7174454...	1.5	7174454/47...									
18	17	2152336...	1.5	21523361/1...									
19	18	6457008...	1.5	64570082/4...									
20	19	1937102...	1.5	193710245/...									
21	20	5811307...	1.5	581130734/...									

D2 $=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{a2-1}+\frac{3}{2}$

Vous remarquez qu'en fin d'exercice, j'ai repris mon tableur pour y rentrer la formule explicite de la suite dans la colonne D : une bonne façon de vérifier qu'on obtient les mêmes résultats que dans la colonne B, ce qui valide la formule explicite trouvée dans l'exercice !

2. (a) Pour tout entier naturel n **non nul**, on a $v_n = u_n - \frac{3}{2}$.

Donc pour tout entier naturel n **non nul**, $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{2}$.

$$= \frac{1}{3}u_n + 1 - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{2}$$

Or $v_n = u_n - \frac{3}{2}$, donc $u_n = v_n + \frac{3}{2}$.

Donc pour tout entier naturel n **non nul**, $v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(v_n + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{3}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme v_1 *(et non v_0 ici!!)*, avec $v_1 = u_1 - \dfrac{3}{2} = 3 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

*(J'insiste ici sur le « Pour tout entier naturel n **non nul** », pour ne pas que vous oubliez que la suite ne commence pas au rang 0, mais vous pouvez mettre aussi « $\forall n \in \mathbb{N}^*$ »)*

(b) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \times q^{n-1} = \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Or $u_n = v_n + \dfrac{3}{2}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{3}{2} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{3}{2}$.

On pourrait chercher à simplifier un peu cette expression, mais ce n'est pas très utile pour la suite. Restons simple...

(c)
$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-1} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{2}\right)\\
&= \left(\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{2}\right)\\
&= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\
&= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{3} - 1\right)\\
&= \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(-\frac{2}{3}\right)\\
&= -\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < 0
\end{aligned}$$

Donc (u_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

(d) $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$

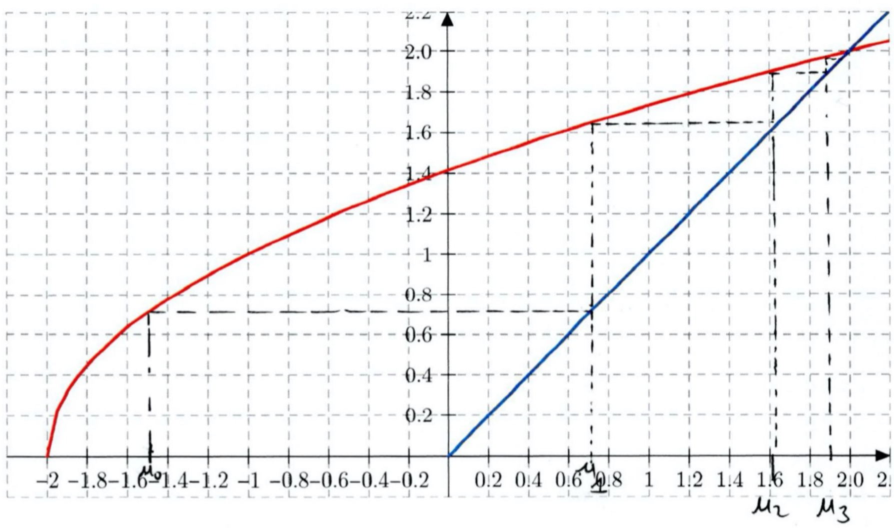
(En effet, quand n prend de très grandes valeurs, n et $n-1$ ont le même comportement et sont très proches, donc cela ne change rien pour la limite quand n tend vers $+\infty$)

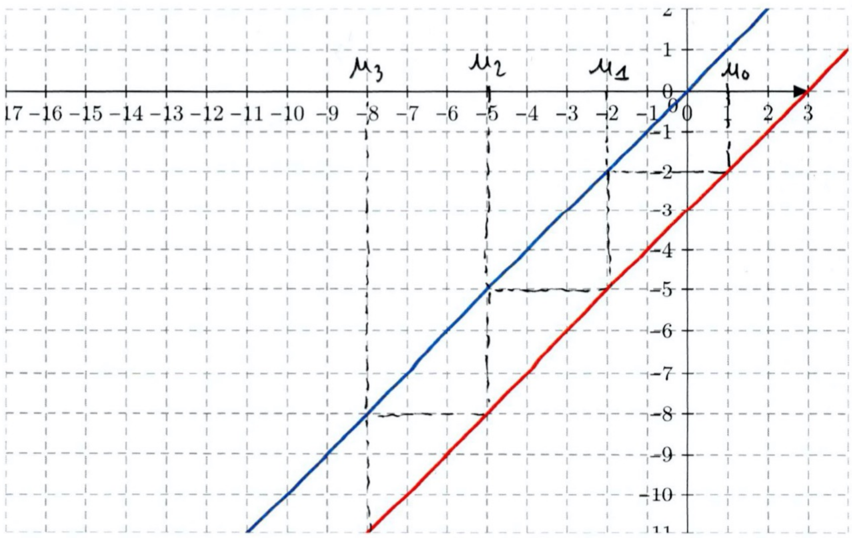
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$

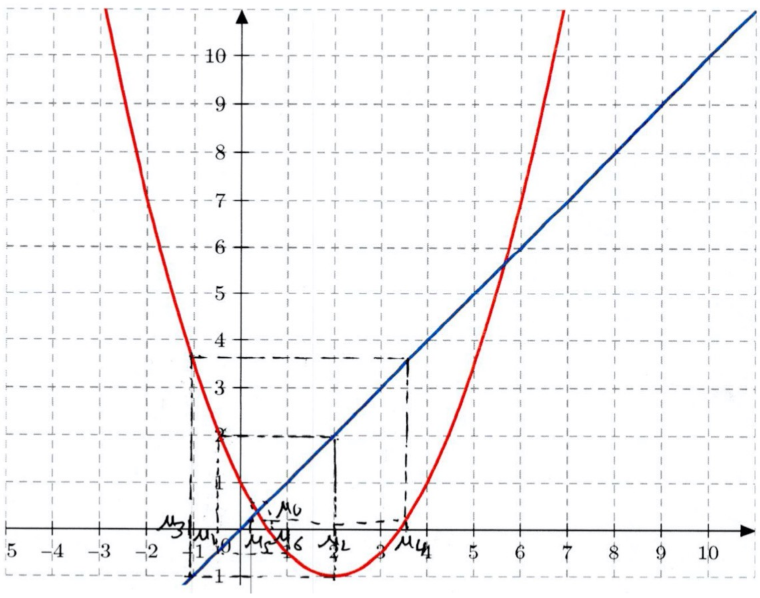
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}$

Exercice 4 Représentation graphique de suite - 1





Exercice 6 Représentation graphique de suite - 3



Exercice 7

1. (a) Il y a 160 inscrits en 2017. On en garde 80 % donc on en garde $\dfrac{80}{100} \times 160 = 128$.
   Comme il y a 50 nouveaux, cela fait $128 + 50 = 178$ inscrits pour 2018.

   (b) Pour loger 178 enfants dans des tentes de 10 places, il faut 18 tentes.

2. Prendre 80 %, c'est multiplier par 0,8. Comme il y a 50 nouveaux chaque année, on passe du nombre d'inscrits l'année n à l'année $n+1$ en multipliant par 0,8 puis en ajoutant 50 ; donc, pour tout n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.

3. (a) La formule que l'on peut saisir dans la cellule `C2` pour obtenir, par recopie vers la droite, le nombre d'inscrits l'année $2017 + n$ est `= 0.8*B2 + 50`.

   (b) On complète ce tableau en arrondissant chacune des valeurs à l'entier :

	A	B	C	D	E	F	G
1	indice n	0	1	2	3	4	5
2	valeur de $u(n)$	160	178	192	204	213	221

(c) $2021 = 2017+4$ donc une estimation du nombre d'inscrits en 2021 est $u_4 = 213$.

4. (a)
   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 250 = 0,8u_n + 50 - 250 = 0,8\left(v_n + 250\right) - 200 = 0,8v_n + 200 - 200 = 0,8v_n$
   - $v_0 = u_0 - 250 = 160 - 250 = -90$

   Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de terme initial $v_0 = -90$.

   (b) On déduit de la question précédente que, pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = -90 \times 0,8^n$.

   (c) $v_n = -90 \times 0,8^n$ et $u_n = v_n + 250$ donc, pour tout n, $u_n = 250 - 90 \times 0,8^n$.

   (d) La suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$ et $-1 < 0,8 < 1$ donc la suite (v_n) a pour limite 0. Comme $u_n = v_n + 250$, on en déduit que la suite (u_n) a pour limite 250.
   Cela veut dire que si le modèle est correct, le nombre d'inscrits va tendre vers 250.

5. (a) On complète l'algorithme proposé :

```
U ← 160
N ← 0
Tant que U ⩽ 220 faire
        U ← 0,8U + 50
        N ← N + 1
Fin tant que
```

   (b) On a calculé dans le tableau $u_5 = 221 > 220$ donc la valeur de N après exécution de cet algorithme est 5.

Exercice 8

Partie A :

1. La formule à saisir dans la cellule B4, puis à recopier vers le bas, permettant d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B est `= 5*B3/4 - B2/4`
2. On complète le tableau donné dans le texte avec des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n :

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	6,75
5	3	6,938
6	4	6,984
7	5	6,996

3. On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers le nombre 7.

Partie B : Étude de la suite

1. (a) $v_{n+1} = u_{n+2} - \dfrac{1}{4}u_{n+1} = \dfrac{5}{4}u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n - \dfrac{1}{4}u_{n+1} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n = v_n$ donc la suite (v_n) est constante.

(b) La suite (v_n) est constante, donc pour tout n, $v_n = v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = 6 - \frac{3}{4} = \frac{21}{4}$.

Donc, pour tout n, $u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{21}{4}$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. (a) Pour tout n, $w_n = u_n - 7$ donc $u_n = w_n + 7$.

- $w_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 = \frac{1}{4}\big(w_n + 7\big) - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}w_n + \frac{7}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}w_n$
- $w_0 = u_0 - 7 = 3 - 7 = -4$

Donc la suite (w_n) est géométrique de premier terme $w_0 = -4$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.

(b) On en déduit que, pour tout n, $w_n = w_0 \times q^n = -4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -4 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Or $u_n = w_n + 7$ donc, pour tout n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

(c) $-1 < \frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 7$.