Première – Chapitre 06

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

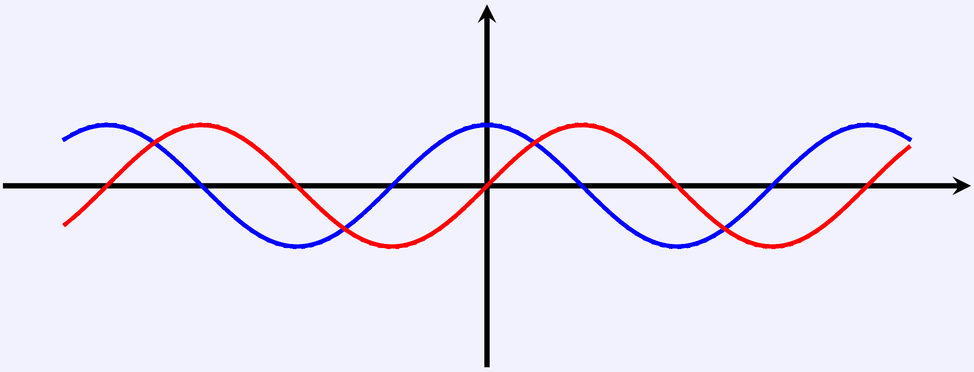
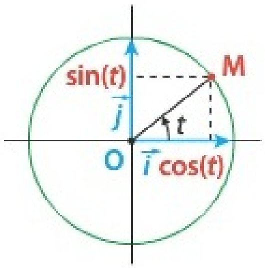


Table des matières

I Fonction sinus et fonction cosinus

1) Définition



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
A tout réel t, on associe un unique point M du cercle trigonométrique de centre O tel que $t = (\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$ (mesure de l'angle orienté en radians).
Le point M a pour coordonnées $(\cos t\,;\sin t)$.

Remarque : $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant \cos t \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin t \leqslant 1$.

DÉFINITION

• La fonction qui a tout réel x fait correspondre l'abscisse $\cos x$ du point M est appelée la fonction cosinus et est notée cos.
• La fonction qui a tout réel x fait correspondre l'ordonnée $\sin x$ du point M est appelée la fonction sinus et est notée sin.

2) Parité des fonctions cosinus et sinus

DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
• On dit que f est **paire sur** $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$.
• On dit que f est **impaire sur** $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x, $f(-x) = -f(x)$.

EXEMPLES

• Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$ est paire sur $\mathbb{R}$:
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 3(-x)^2 + 1 = 3x^2 + 1 = f(x)$ donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

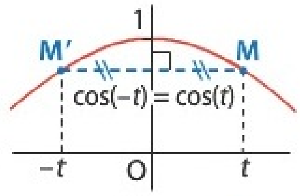
• Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$:
$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ donc g est impaire sur $\mathbb{R}$.

• Étudier la parité de la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = 5 - 2x$:
$f(1) = 5 - 2 \times 1 = 5 - 2 = 3$ et $f(-1) = 5 - 2 \times (-1) = 5 + 2 = 7$.
$f(-1) \neq f(1)$ donc f n'est pas paire.
$f(-1) \neq -f(1)$ donc f n'est pas impaire.

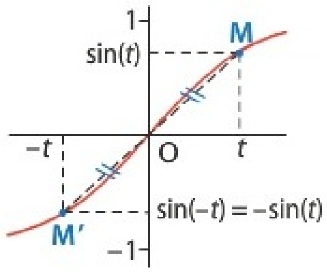
PROPRIÉTÉ

• La fonction cos est paire sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos x$.
• La fonction sin est impaire sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin x$.

Interprétation graphique :
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



• Les points $M(x;\cos x)$ et $M'(-x;\cos(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O;\vec{\jmath})$. La courbe représentative de la fonction cosinus est donc **symétrique par rapport à l'axe** $(O;\vec{\jmath})$.



• Les points $M(x;\sin x)$ et $M'(-x;\sin(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. La courbe représentative de la fonction sinus est donc **symétrique par rapport à l'origine** O **du repère**.

3) Périodicité des fonctions cosinus et sinus

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T un réel.
On dit que f est périodique de période T si et seulement si, pour tout réel x, $f(x+T)=f(x)$.

PROPRIÉTÉ

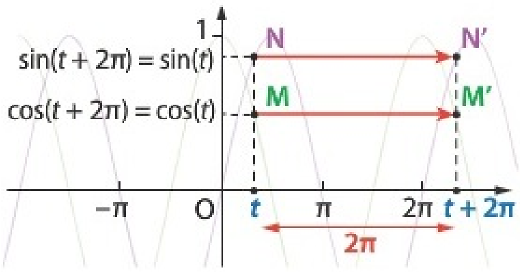
Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π.
Autrement dit, pour tout réel x, $\cos(x+2\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$.

EXEMPLES

• Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=5+3\cos(x)$ est périodique de période 2π :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x+2\pi)=5+3\cos(x+2\pi)=5+3\cos(x)=f(x)$ donc f est périodique de période 2π.

• Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\sin(2x)$ est périodique de période π :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x+\pi)=\sin(2(x+\pi))=\sin(2x+2\pi)=\sin(2x)=g(x)$ donc g est périodique de période π.

Conséquences graphiques :



$M(x;\cos x)$ et $M'(x+2\pi;\cos(x+2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{MM'}=2\pi\vec{\imath}$.
$N(x;\sin x)$ et $N'(x+2\pi;\sin(x+2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{NN'}=2\pi\vec{\imath}$.
Il suffit donc d'étudier les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de longueur 2π. Mais de plus, les fonctions sin et cos étant respectivement impaires et paires sur $\mathbb{R}$, par symétrie, on peut restreindre leur étude sur un intervalle de longueur π.

II Étude de la fonction cosinus

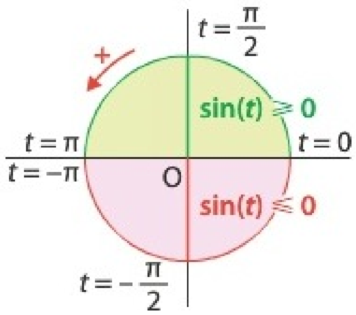
1) Dérivée

PROPRIÉTÉ

La fonction cosinus est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos' x = -\sin x$.

2) Sens de variation

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$:



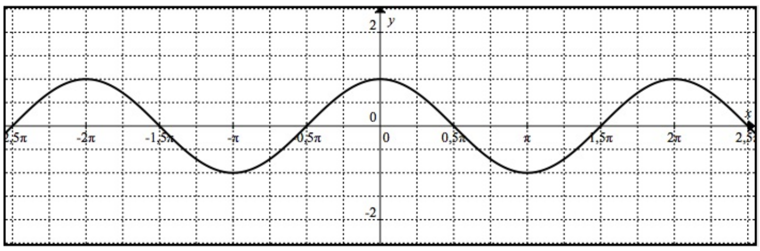
x	0		π
$\cos' x = -\sin x$	0	$-$	0
$\cos$	1	$\searrow$	-1

On en déduit alors le sens de variations de la fonction cosinus sur $[-\pi\,;\pi]$ par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées :

x	$-\pi$		0		π
$\cos$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

3) Courbe représentative

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$



III Étude de la fonction sinus

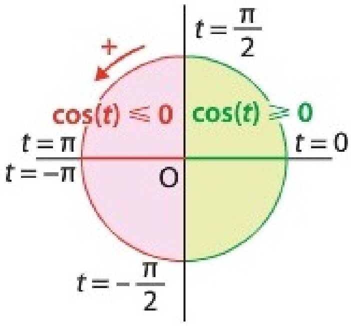
1) Dérivée

PROPRIÉTÉ

La fonction sinus est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$.

2) Sens de variation

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$:



x	0		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\sin' x = \cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On en déduit alors le sens de variations de la fonction sinus sur $[-\pi\,;\pi]$ par symétrie centrale par rapport à O :

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\sin$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3) Courbe représentative

x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{5\pi}{6}$
$\sin x$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$