

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

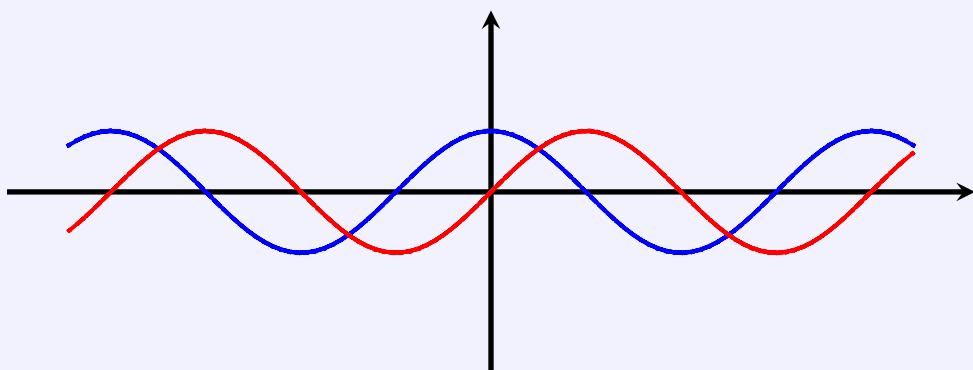
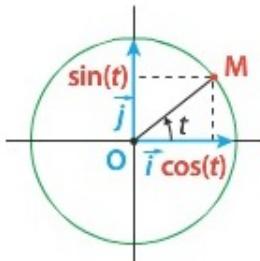


Table des matières

I	Fonction sinus et fonction cosinus	2
1)	Définition	2
2)	Parité des fonctions cosinus et sinus	2
3)	Périodicité des fonctions cosinus et sinus	3
II	Étude de la fonction cosinus	4
1)	Dérivée	4
2)	Sens de variation	4
3)	Courbe représentative	4
III	Étude de la fonction sinus	5
1)	Dérivée	5
2)	Sens de variation	5
3)	Courbe représentative	5

I Fonction sinus et fonction cosinus

1) Définition



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

A tout réel t , on associe un unique point M du cercle trigonométrique de centre O tel que $t = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ (mesure de l'angle orienté en radians). Le point M a pour coordonnées $(\cos t; \sin t)$.

Remarque : $\forall t \in \mathbb{R}$, $1 \leq \cos t \leq 1$ et $-1 \leq \sin t \leq 1$.

DÉFINITION

- La fonction qui à tout réel x fait correspondre l'abscisse $\cos x$ du point M est appelée la fonction cosinus et est notée \cos .
- La fonction qui à tout réel x fait correspondre l'ordonnée $\sin x$ du point M est appelée la fonction sinus et est notée \sin .

REMARQUE

Ces deux fonctions sont définies sur \mathbb{R} .

2) Parité des fonctions cosinus et sinus

DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} .

- On dit que f est **paire sur \mathbb{R}** si et seulement si pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est **impaire sur \mathbb{R}** si et seulement si pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$.

EXEMPLES

- Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + 1$ est paire sur \mathbb{R} :
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 3(-x)^2 + 1 = 3x^2 + 1 = f(x)$ donc f est paire sur \mathbb{R} .

- Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^3$ est impaire sur \mathbb{R} :
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ donc g est impaire sur \mathbb{R} .

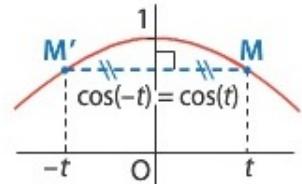
- Étudier la parité de la fonction k définie sur \mathbb{R} par $k(x) = 5 - 2x$:
 $k(1) = 5 - 2 \times 1 = 5 - 2 = 3$ et $k(-1) = 5 - 2 \times (-1) = 5 + 2 = 7$.
 $k(-1) \neq k(1)$ donc k n'est pas paire.
 $k(-1) \neq -k(1)$ donc k n'est pas impaire.

PROPRIÉTÉ

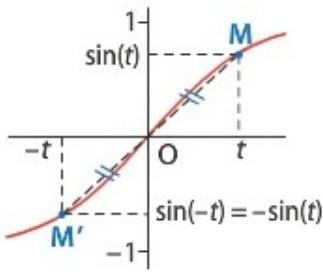
- La fonction \cos est paire sur \mathbb{R} . Autrement dit, pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos x$.
- La fonction \sin est impaire sur \mathbb{R} . Autrement dit, pour tout réel x , $\sin(-x) = -\sin x$.

Interprétation graphique :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



- Les points $M(x; \cos x)$ et $M'(-x; \cos(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$. La courbe représentative de la fonction cosinus est donc **symétrique par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$** .



- Les points $M(x; \sin x)$ et $M'(-x; \sin(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. La courbe représentative de la fonction sinus est donc **symétrique par rapport à l'origine O du repère**.

3) Périodicité des fonctions cosinus et sinus

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et T un réel.

On dit que f est périodique de période T si et seulement si, pour tout réel x , $f(x + T) = f(x)$.

PROPRIÉTÉ

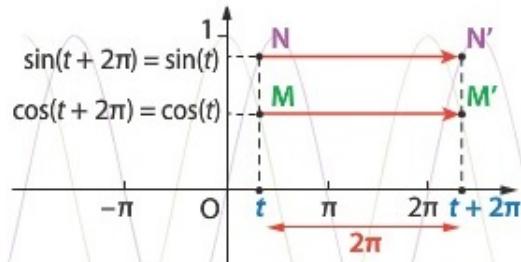
Les fonctions cos et sin sont périodiques de période 2π .

Autrement dit, pour tout réel x , $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

EXEMPLES

- Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5 + 3 \cos(x)$ est périodique de période 2π :
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = 5 + 3 \cos(x + 2\pi) = 5 + 3 \cos(x) = f(x)$ donc f est périodique de période 2π .
- Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \sin(2x)$ est périodique de période π :
 $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2x) = g(x)$ donc g est périodique de période π .

Conséquences graphiques :



$M(x; \cos x)$ et $M'(x + 2\pi; \cos(x + 2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{MM'} = 2\pi\vec{i}$.
 $N(x; \sin x)$ et $N'(x + 2\pi; \sin(x + 2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{NN'} = 2\pi\vec{i}$.
Il suffit donc d'étudier les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de longueur 2π . Mais de plus, les fonctions sin et cos étant respectivement impaires et paires sur \mathbb{R} , par symétrie, on peut restreindre leur étude sur un intervalle de longueur π .

II Étude de la fonction cosinus

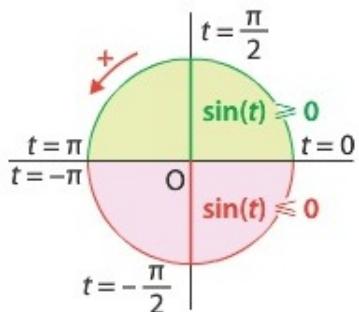
1) Dérivée

PROPRIÉTÉ

La fonction cosinus est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, \cos' x = -\sin x$.

2) Sens de variation

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier la fonction cosinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$:



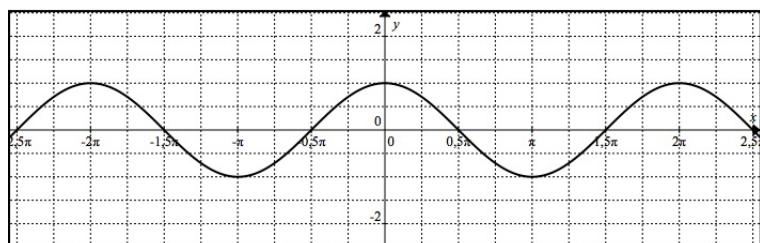
x	0	π
$\cos' x = -\sin x$	0	- 0
cos	1	-1

On en déduit alors le sens de variations de la fonction cosinus sur $[-\pi ; \pi]$ par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées :

x	$-\pi$	0	π
cos	-1	1	-1

3) Courbe représentative

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$



III Étude de la fonction sinus

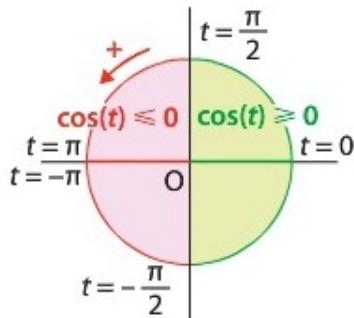
1) Dérivée

PROPRIÉTÉ

La fonction sinus est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x$.

2) Sens de variation

D'après ce qui précède, il suffit d'étudier la fonction sinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$:



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin' x = \cos x$		+	-
sin	0	1	0

On en déduit alors le sens de variations de la fonction sinus sur $[-\pi ; \pi]$ par symétrie centrale par rapport à O :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	-1	1	0

3) Courbe représentative

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

