Première – Chapitre 4

DÉRIVATION

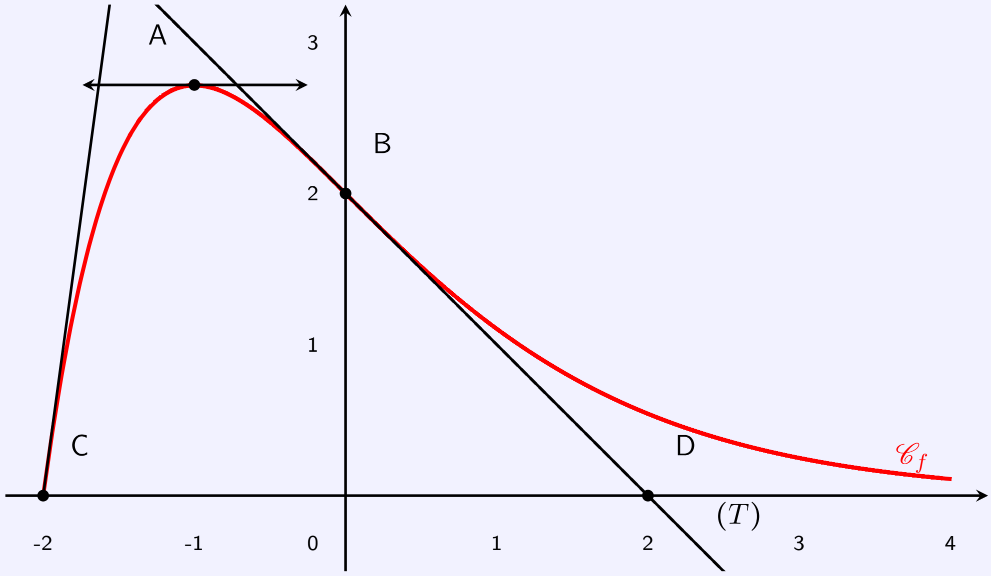


Table des matières

I Nombre dérivé d'une fonction en un réel

Dans cette partie, f désigne une fonction définie au moins sur un intervalle I, C_f désigne sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ et a et b désignent deux réels appartenant à I avec $a \neq b$.

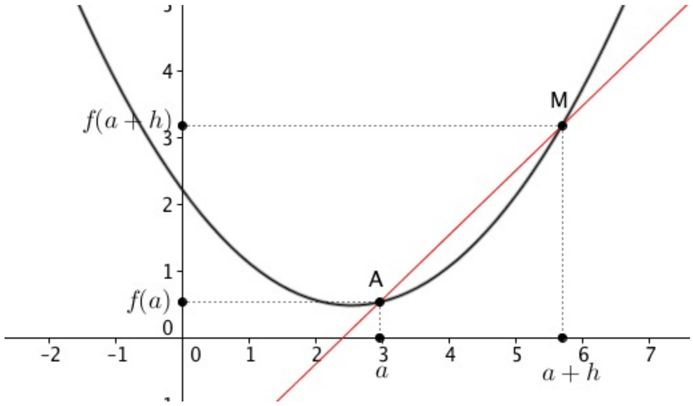
1) Taux de variation

DÉFINITION

Le taux de variation de la fonction f entre a et b est le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

En posant $b = a+h$, avec h un réel **non nul**, ce quotient s'écrit aussi $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2) Interprétation graphique du taux de variation



Notons A le point de coordonnées $(a\,f(a))$ et M le point de coordonnées $(a+h\,;f(a+h))$.

Le coefficient directeur de la sécante (AM) est égal à $\dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

On a ainsi la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

Le taux de variation de la fonction f entre a et b est égal au coefficient directeur de la sécante (AM).

3) Nombre dérivé

DÉFINITION

Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proches de zéro (mais toujours avec $h \neq 0$), les nombres $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ deviennent de plus en proches d'un nombre **réel** fixé noté l.
Alors on dit que la fonction f est **dérivable en** a et que l est le **nombre dérivé** de f en a.
Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.

REMARQUE

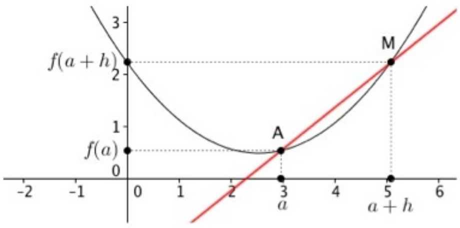
On peut alors noter $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

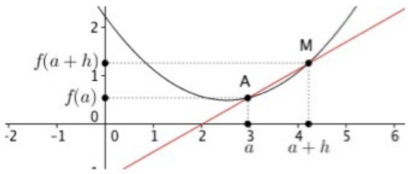
4) Interprétation graphique du nombre dérivé

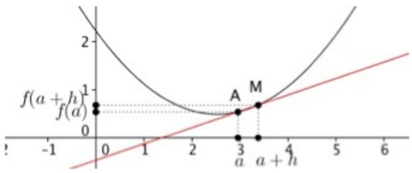
On suppose ici que la fonction f est dérivable en un réel a de l'intervalle I.

DÉFINITION

La droite qui passe par le point $A(a\,;f(a))$ et dont le coefficient directeur est le réel $f'(a)$ est la **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.







REMARQUE

Autrement dit, quand il existe, $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.**

PROPRIÉTÉ

L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

DÉMONSTRATION

Nommons T_a cette tangente. Par définition, $f'(a)$ est le coefficient directeur de T_a, donc il existe un réel b tel que l'équation de T_a soit $y = f'(a)x + b$.
Or $A(a\,;f(a)) \in T_a$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de T_a, c'est-à-dire $y_A = f'(a)x_A + b$, d'où $f(a) = f'(a)\times a + b$, donc $b = f(a) - af'(a)$.
L'équation de T_a est donc : $T_a : y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$, soit $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

II Dérivées des fonctions usuelles

1) Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$.

1. Démontrer que f est dérivable en 2 et justifier que $f'(2) = 12$.
2. Démontrer que f est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ et justifier que $f'(x) = 6x$.

*Faire alors le lien avec la notion de fonction dérivée et la dérivabilité **sur** un intervalle.*

2) Fonction dérivée

DÉFINITION

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle I.
La fonction f est dite **dérivable sur** I si et seulement si pour tout réel $a \in I$, f est dérivable en a.
La fonction définie sur I qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé de f en x est appelée la **fonction dérivée** de f. Cette fonction est notée f'.

EXEMPLE

Démontrer que la fonction carrée est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$.
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \dfrac{2xh+h^2}{h} = \dfrac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$.
Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $2x \in \mathbb{R}$ car $x \in \mathbb{R}$.
Donc f est dérivable en x.
Or ceci est vrai pour tout réel x, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.

3) Dérivée d'une fonction constante

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto k$, $k \in \mathbb{R}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$.
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$.
Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $0 \in \mathbb{R}$.
Donc f est dérivable en x.
Or ceci est vrai pour tout réel x, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a alors, pour tout réel x, $f'(x) = 0$.

4) Dérivée d'une fonction affine

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax+b$, $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$ et a non nul.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$.
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = \dfrac{ax+ah+b-ax-b}{h} = \dfrac{ah}{h} = a.$
Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $a \in \mathbb{R}$.
Donc f est dérivable en x.
Or ceci est vrai pour tout réel x, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a alors, pour tout réel x, $f'(x) = a$.

5) Dérivée de la fonction carrée

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$.

DÉMONSTRATION

faite dans le II 1.

6) Dérivée de la fonction cube

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$.

Pré-requis utile pour la démonstration :
Pour tous réels a et b, on a :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

En effet :
$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b)$
$(a+b)^3 = (a^2+2ab+b^2)(a+b)$
$(a+b)^3 = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

DÉMONSTRATION

Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$.
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \dfrac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \dfrac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h} = 3x^2+3xh+h^2.$
Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $3x^2 \in \mathbb{R}$ car $x \in \mathbb{R}$.
Donc f est dérivable en x. Or ceci est vrai pour tout réel x, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a alors, pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$.

7) Dérivée de la fonction inverse

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Alors f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

REMARQUE

Par définition, une fonction est dérivable **sur un intervalle** uniquement. C'est pour cela qu'on évite de dire que la fonction inverse est « dérivable sur $\mathbb{R}^*$ » car $\mathbb{R}^*$ est une réunion d'intervalles et non un intervalle ($\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$)

DÉMONSTRATION

Soit $x \in]0\,;+\infty[$. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h > 0$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x}{x(x+h)} - \frac{x+h}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $-\frac{1}{x^2} \in \mathbb{R}$ car $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc f est dérivable en x.

Or ceci est vrai pour tout réel $x > 0$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On démontre de même que f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.

On a alors, pour tout réel x non nul, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

8) Dérivées des fonctions de la forme $x \mapsto x^n$

PROPRIÉTÉ **admise**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^n$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

REMARQUE

Cette propriété reste vraie si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$ (c'est-à-dire si n est un entier strictement négatif) en restreignant l'ensemble de définition de f à $\mathbb{R}^*$. f est alors dérivable sur sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

EXEMPLES

- Si $n = 2$, alors $f(x) = x^2$.
f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$.
(*On retrouve le résultat vu pour la fonction carrée*).
- Si $n = 3$, alors $f(x) = x^3$.
f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$.
(*On retrouve le résultat vu pour la fonction cube*).
- Si $n = -1$, alors $f(x) = x^{-1}\left(= \frac{1}{x}\right)$. f est donc définie et dérivable sur sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = -1x^{-1-1} = -x^{-2}\left(= -\frac{1}{x^2}\right)$.
(*On retrouve le résultat vu pour la fonction inverse*).

EXERCICE

Démontrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ est dérivable sur sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer sa dérivée.
$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$. Donc d'après la propriété précédente, f est dérivable sur sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$.

9) Dérivée de la fonction racine carrée

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction racine carrée définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
Alors f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

DÉMONSTRATION

• **Montrons que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$:**
Soit x un réel de $]0\,;+\infty[$.
Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel $x+h \in]0\,;+\infty[$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$ car $x \in]0\,;+\infty[$.
Donc f est dérivable en x.
Or ceci est vrai pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
On a alors, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

• **Montrons que f n'est pas dérivable en 0 :**
Calculons pour cela le taux de variations de f entre 0 et $0+h$ avec $h \neq 0$ tel que $0+h \in [0\,;+\infty[$:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\sqrt{h}$ tend vers 0 et le quotient $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tend vers un quotient dont le dénominateur serait nul, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.
Or f est dérivable en 0 si et seulement si $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tend vers un nombre réel.
Donc f n'est pas dérivable en 0.

REMARQUES

• En fait, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tend vers l'inverse d'un nombre aussi proche de 0 que l'on veut (tout en restant positif), donc il tend vers $+\infty$. Or $+\infty \notin \mathbb{R}$ (puisque $\mathbb{R} =]-\infty\,;+\infty[$, intervalle **ouvert** !) donc f n'est pas dérivable en 0.

• $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et la formule vue pour x^n s'applique pour $n = \frac{1}{2}$.

10) Dérivée de la fonction valeur absolue

PROPRIÉTÉ

Soit f la fonction **valeur absolue** définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Alors la fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ et on a $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

En particulier, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

DÉMONSTRATION

• Montrons que f n'est pas dérivable en 0 :
Posons, pour tout réel h non nul, $t(h) = \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$. On a alors $t(h) = \dfrac{|0+h|}{h} = \dfrac{|h|}{h}$.
Si $h > 0$, $t(h) = \dfrac{h}{h} = 1$ mais si $h < 0$, $t(h) = \dfrac{-h}{h} = -1$.
Ainsi, selon si h est positif ou négatif, le taux de variations de f en 0 tend vers deux réels différents, ce qui est contraire à la définition de la dérivabilité en un réel. Donc f n'est pas dérivable en 0.

• Montrons que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$:
Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = |x| = x$.
Or la fonction $x \mapsto x$ est une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est $x \mapsto 1$.
Donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1$.

• Montrons que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$:
Pour tout réel $x < 0$, $f(x) = |x| = -x$.
Or la fonction $x \mapsto -x$ est une fonction affine dérivable sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée est $x \mapsto -1$.
Donc f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et pour tout $x < 0$, $f'(x) = -1$.

11) Tableau récapitulatif des dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	D_f	$D_{f'}$	Conditions
k	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	a, b réels
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$	$n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$	
$\lvert x\rvert$	$\begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$	

EXERCICE

Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivation et l'expression de la dérivée :

$f : x \mapsto 2x+3$ $\quad g : x \mapsto x^4$ $\quad h : x \mapsto 4-5x$ $\quad k : x \mapsto 17$ $\quad \ell : x \mapsto \dfrac{1}{x^5}$

III Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient

1) Dérivée d'une somme

PROPRIÉTÉ

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $u+v$ est définie et dérivable sur I et $(u+v)' = u'+v'$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de I.
Calculons le taux de variations de la fonction $u+v$ entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$:

$$\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} = \frac{u(x+h)+v(x+h)-u(x)-v(x)}{h}.$$

$$\frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}.$$

Or u est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $u'(x) \in \mathbb{R}$.

De même, v est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$ tend vers $v'(x) \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $\dfrac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h}$ tend vers $u'(x)+v'(x) \in \mathbb{R}$.

Donc $u+v$ est dérivable en x. Or ceci est vrai pour tout réel x de I, donc $u+v$ est dérivable sur I et, $(u+v)' = u'+v'$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2+5x$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2) Dérivée de ku

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un réel.
Alors la fonction $ku : x \mapsto k \times u(x)$ est définie et dérivable sur I et $(ku)' = ku'$

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de I.
Calculons le taux de variations de la fonction ku entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$:
$\dfrac{(ku)(x+h)-(ku)(x)}{h} = \dfrac{ku(x+h)-ku(x)}{h} = \dfrac{k(u(x+h)-u(x))}{h} = k \times \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$.
Or u est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $u'(x) \in \mathbb{R}$.
Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{(ku)(x+h)-(ku)(x)}{h}$ tend vers $k \times u'(x) \in \mathbb{R}$.
Donc ku est dérivable en x. Or ceci est vrai pour tout réel x de I, donc ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 3x^5$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

3) Conséquences des dérivées d'une somme et de ku

a Dérivée d'une différence

PROPRIÉTÉ

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $u - v$ est définie et dérivable sur I et $(u-v)' = u' - v'$.

DÉMONSTRATION

$u - v = u + (-v)$ donc à l'aide de la dérivée de kv avec $k = -1$ et de la dérivée d'une somme, le résultat est immédiat.

b Dérivée d'une fonction polynôme

PROPRIÉTÉ admise

Toute fonction polynôme est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 5x^3 - 4x^2 + 5x - 178$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4) Dérivée d'un produit

PROPRIÉTÉ

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est définie et dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de I.
Calculons le taux de variations de la fonction uv entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$:
$\dfrac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h} = \dfrac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$
$\dfrac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h} = \dfrac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$
$\dfrac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h} = \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h) + \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}u(x)$.
Or u est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $u'(x) \in \mathbb{R}$.
De même, v est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}$ tend vers $v'(x) \in \mathbb{R}$.
Enfin, on admet que si h tend vers 0, alors $v(x+h)$ tend vers $v(x)$.
Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}$ tend vers $u'(x)v(x)+v'(x)u(x) \in \mathbb{R}$.
Donc uv est dérivable en x. Or ceci est vrai pour tout réel x de I, donc uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x\sqrt{x}$. Justifier que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer sa dérivée.

EXERCICE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Montrer que la fonction u^2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(u^2)' = 2u'u$.

5) Dérivée d'un quotient

a Dérivée de l'inverse d'une fonction non nulle

PROPRIÉTÉ

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que pour tout réel x de I, $u(x) \neq 0$. Alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ est définie et dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de I.
Calculons le taux de variations de la fonction $\frac{1}{u}$ entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$:
$\dfrac{\dfrac{1}{u(x+h)} - \dfrac{1}{u(x)}}{h} = \dfrac{\dfrac{u(x)}{u(x)u(x+h)} - \dfrac{u(x+h)}{u(x)u(x+h)}}{h} = \dfrac{u(x)-u(x+h)}{hu(x)u(x+h)} = -\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} \times \dfrac{1}{u(x)u(x+h)}$.
Or u est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$ tend vers $u'(x) \in \mathbb{R}$.
On admet de plus que si h tend vers 0, alors $u(x+h)$ tend vers $u(x)$.
Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{\dfrac{1}{u(x+h)} - \dfrac{1}{u(x)}}{h}$ tend vers $-u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)\times u(x)} = \dfrac{-u'(x)}{u(x)^2} \in \mathbb{R}$.
Donc $\frac{1}{u}$ est dérivable en x. Or ceci est vrai pour tout réel x de I, donc $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

b Dérivée d'un quotient

PROPRIÉTÉ

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et telles que pour tout réel x de I, $v(x) \neq 0$.
Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

DÉMONSTRATION

$\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ est dérivable sur I (via la propriété de la dérivée du produit) et :
$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \left(u \times \dfrac{1}{v}\right)' = u' \times \dfrac{1}{v} + u \times \left(-\dfrac{v'}{v^2}\right) = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et calculer sa dérivée.

c Conséquence pour les fonctions rationnelles

PROPRIÉTÉ admise

Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

6) Dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$

PROPRIÉTÉ

Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$.
Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I et soit J un intervalle tel que, pour tout réel x de J, $ax+b$ appartient à I.

Alors la fonction f définie sur J par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable sur J et pour tout réel x de J, $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de J. Calculons le taux de variations de f entre x et $x+h$, avec $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in J$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{g(a(x+h)+b)-g(ax+b)}{h} = \frac{g(ax+ah+b)-g(ax+b)}{h}$$
$$= \frac{a\left[g((ax+b)+ah)-g(ax+b)\right]}{ah}.$$

En posant $H = ah$ et $X = ax+b$, ce taux de variations s'écrit alors $a \times \dfrac{g(X+H)-g(X)}{H}$.
Or quand h tend vers 0, ah tend aussi vers 0, donc H tend également vers 0.
Or d'après l'énoncé, $x \in J$, donc $X \in I$ et la fonction g est dérivable sur I. Ainsi, quand H tend vers 0, le taux de variations de g entre X et $X+H$ tend vers $g'(X)$.
Ainsi, quand H tend vers 0, $a \times \dfrac{g(X+H)-g(X)}{H}$ tend vers $a \times g'(X)$, réel fixe.
Ainsi, quand h tend vers 0, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers $a \times g'(ax+b)$, réel fixe.
Donc f est bien dérivable en $x \in J$.
Or ceci est vrai pour tout réel x de J, donc f est bien dérivable sur J et pour tout réel $x \in J$, $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x+5)^3$.
Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

7) Tableau récapitulatif des opérations sur les dérivées

f	f'	Conditions
$u+v$	$u'+v'$	
ku	ku'	k réel
$u-v$	$u'-v'$	
uv	$u'v+uv'$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$v \neq 0$
$g(ax+b)$	$a \times g'(ax+b)$	$a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$

IV Lien entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée

1) Du sens de variation d'une fonction au signe de sa dérivée

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- (1) Si f est croissante (ou strictement croissante) sur I, alors $\forall x \in I$, $f'(x) \geqslant 0$.
- (2) Si f est décroissante (ou strictement décroissante) sur I, alors $\forall x \in I$, $f'(x) \leqslant 0$.
- (3) Si f est constante sur I, alors $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$.

DÉMONSTRATION

Soit x un réel de I et h un réel non nul tel que $x + h \in I$.

- (1) f est croissante sur I, donc :

- si $h > 0$, alors $x + h > x$ et $f(x+h) \geqslant f(x)$, c'est-à-dire $f(x+h) - f(x) \geqslant 0$;
- si $h < 0$, alors $x + h > x$ et $f(x+h) \leqslant f(x)$, c'est-à-dire $f(x+h) - f(x) \leqslant 0$.

Dans les deux cas, $f(x+h) - f(x)$ et h sont de même signe, donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant 0$.
Or f est dérivable en x, donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tend vers le nombre réel $f'(x)$ lorsque h tend vers 0.
Si l'on donne à h des valeurs proches de 0, alors $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ prend des valeurs positives. On admet alors que la limite de ce taux de variations, quand h tend vers 0, est aussi positive, c'est-à-dire $f'(x) \geqslant 0$.

- (2) On démontre cette fois, puisque f est décroissante sur I, que $f(x+h) - f(x)$ et h sont de signes contraires, donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0$.
On admet alors que la limite de ce taux de variations, quand h tend vers 0, est aussi négative, c'est-à-dire que $f'(x) \leqslant 0$.

- (3) f est constante sur I, donc $f(x+h) = f(x)$ et ainsi $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$, donc $f'(x) = 0$.

2) Du signe de la dérivée d'une fonction à son sens de variation

PROPRIÉTÉ admise

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Si f' est positive sur I et ne s'annule qu'en des nombres isolés, alors f est strictement croissante sur I.
Si f' est négative sur I et ne s'annule qu'en des nombres isolés, alors f est strict. décroissante sur I.
Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

REMARQUE

Cette propriété est l'une des plus utilisées en analyse ! En effet, elle permet de déterminer les variations de nombreuses fonctions.

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$.
   Déterminer le sens de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de g.
   (b) Déterminer le sens de variations de g sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
3. Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{3x+1}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de h.
   (b) Déterminer le sens de variations de h sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

V Extremum d'une fonction

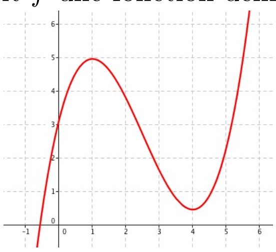
1) Extremum local d'une fonction

DÉFINITION

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit x_0 un réel de I qui ne soit pas une borne de I.
• Dire que $f(x_0)$ est un **maximum local** (resp. minimum local) de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout réel x de J, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).
• Dire que $f(x_0)$ est un **extremum local** de f signifie que $f(x_0)$ est un maximum local ou un minimum local de f.

EXEMPLE

Soit f une fonction définie sur $[-1\,;6]$. Sa courbe représentative est tracée ci-dessous :



- $f(1) = 5$ est un maximum local de f. En effet, pour tout $x \in]0\,;2[$, $f(x) \leqslant 5$.
- $f(4) = 0,5$ est minimum local de f. En effet, pour tout $x \in]3\,;5[$, $f(x) \geqslant 0,5$.

REMARQUE

Attention au vocabulaire ! Dans l'exemple précédent, on dit que f admet un maximum local **en 1** et que ce maximum **est égal à** 5.

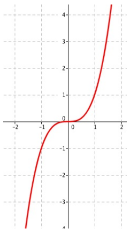
2) Extremum local et fonction dérivée

PROPRIÉTÉ admise

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit x_0 un réel de I qui ne soit pas une borne de I. Si $f(x_0)$ est un extremum local de f, alors $f'(x_0) = 0$.

REMARQUES

- Si $f(x_0)$ est un extremum local de f, alors la courbe représentative de f admet au point d'abscisse x_0 une tangente horizontale (parallèle à l'axe des abscisses).
- ATTENTION ! La réciproque de cette propriété est fausse :



Exemple : soit la fonction f cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$:
$f'(0) = 0$ mais $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local de f.

Il manque en effet une condition... :

PROPRIÉTÉ admise

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit x_0 un réel de I qui ne soit pas une borne de I. Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f.