PARTIE A – NORME ET ANGLE

Exercice 1

Dans chacun des deux cas suivants, déterminez une valeur approchée au dixième de radian près de l'angle $\widehat{ACB}$.

1) $CA = 8$, $CB = 4$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 12$.

2) $CA = 5$, $CB = 8$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -6$.

Exercice 2

On se place dans un repère orthonormé. Soient les points $A(0\,;4)$, $B(6\,;3)$ et $C(-5\,;-2)$.

1) Calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.

2) Déduisez-en une valeur approchée en degrés de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

PARTIE B – PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Exercice 3

Les écritures suivantes n'ont pas de signification mathématique. Pour quelle(s) raison(s) ?

1) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}$

2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v})$

3) $\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{v})$

4) $\vec{v} \cdot \overrightarrow{u+v}$

Exercice 4

On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.
Évaluez chacune des expressions suivantes.

1) $\vec{u} \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$

2) $(5\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v}$

3) $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v})$

4) $(3\vec{u} - 2\vec{v})^2$

5) $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$

6) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) - (\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{v}$

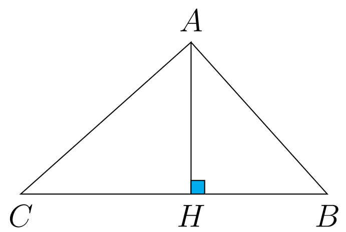
7) $\|2\vec{u} - \vec{v}\|^2$

8) $\|\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - 3\vec{v}\|^2$

PARTIE C – PROJETÉ ORTHOGONAL

Exercice 5

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A.
On donne les longueurs suivantes : $AB = 6$, $BH = 4$ et $HC = 5$.



À l'aide de projetés orthogonaux, calculez les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$

3) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$

4) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

Exercice 6

Soit $ABCD$ un carré de côté 5. Calculez les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **2)** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ **3)** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$

Exercice 7

Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = AD = 5$ et $DC = 7$.

Calculez les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

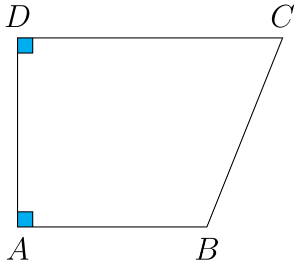
2) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$

4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

5) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$

6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$



Exercice 8

$ABCD$ est un parallélogramme tel que : $AB = 4$, $AD = 2$ et $\widehat{BAD} = 45^\circ$.

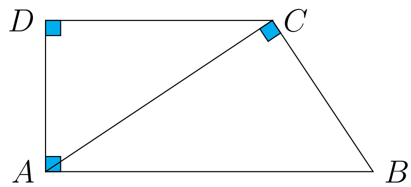
1) Calculez les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

2) Déduisez-en la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Exercice 9

$ABCD$ est un trapèze rectangle dont la diagonale $[AC]$ est perpendiculaire au côté $[BC]$.

En calculant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes, démontrez que $AC^2 = AB \times CD$.

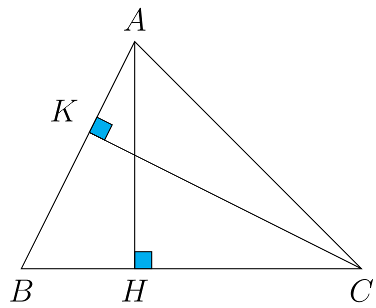


Exercice 10

ABC est le triangle ci-contre. H est le pied de la hauteur issue de A et K est le pied de la hauteur issue de C.
On a de plus : $HA = 4$, $HB = 2$ et $HC = 4$.

1) Calculez $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

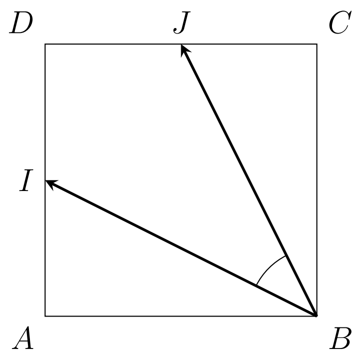
2) Calculez la longueur BK.



PARTIE D – POUR ALLER PLUS LOIN

Exercice 11

$ABCD$ est un carré de côté 4.
I et J sont les milieux respectifs des côtés $[AD]$ et $[CD]$.



1) Démontrez que $\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=64$.

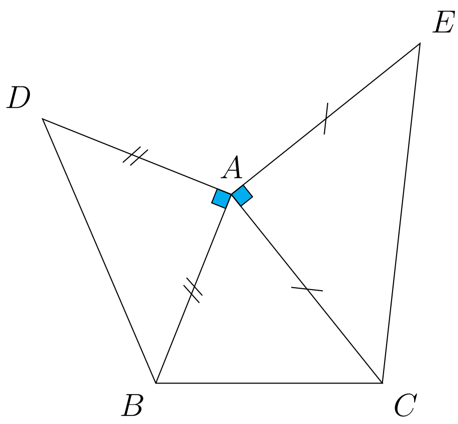
2) Déduisez-en le produit scalaire $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ}$.

3) Démontrez que $BI=2\sqrt{5}$.

4) Déterminez alors la valeur approchée par excès au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{IBJ}$.

Exercice 12

ABC est un triangle. On construit les deux triangles BAD et EAC, directs rectangles et isocèles en A.



1) Démontrez que $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

2) Déduisez-en que les droites (BE) et (CD) sont perpendiculaires.

Exercice 13

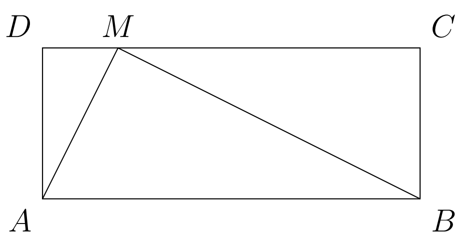
Soit ABC un triangle quelconque.

1) Démontrez que, pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

2) Déduisez-en que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 14

$ABCD$ est un rectangle tel que : $AB=5$ et $AD=2$. M est le point du segment $[CD]$ tel que $CM=4$. On se propose de démontrer de trois façons différentes que le triangle ABM est rectangle.



1) Avec le théorème de Pythagore.

2) Avec la géométrie analytique dans le repère orthonormé $(A\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, où $\vec{\imath}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{\jmath}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

3) En développant et en simplifiant : $\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}\right)$.