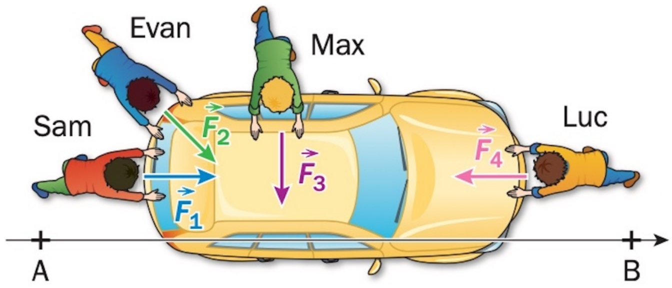
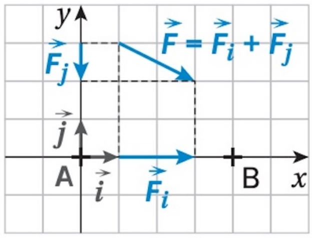
Activité 1

La voiture ci-contre est tombée en panne. On souhaite la déplacer d'un point A vers un point B. Quatre personnes poussent cette voiture en exerçant des forces de même norme F mais avec des directions différentes. Chaque personne n'a pas la même efficacité pour déplacer la voiture de A vers B. On dit que ces forces $\vec{F}$ « n'échangent pas le même travail ».



1. Classer ces personnes de la plus efficace à la moins efficace pour déplacer la voiture de A vers B ; expliquer ce classement.

Pour traduire l'efficacité de chaque force, on s'intéresse au projeté orthogonal $\vec{F_i}$ du vecteur $\vec{F}$ sur la droite (AB), qui est la seule composante du vecteur $\vec{F}$ qui influe sur le déplacement voulu de la voiture.



Les physiciens ont introduit au XIXe siècle la notion de **travail d'une force** :

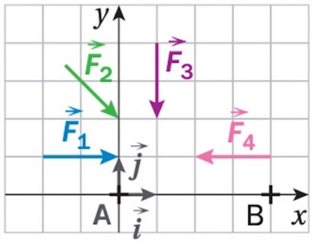
> Le travail d'une force constante $\vec{F}$ sur le trajet de A vers B est appelé **produit scalaire de $\vec{F}$ et de $\overrightarrow{AB}$**.
> Il se note $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$ et il vaut :
> - $\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{F_i}\|$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F_i}$ ont le même sens ;
> - $-\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\vec{F_i}\|$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{F_i}$ sont de sens opposés.

2. On a reproduit ci-contre les forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$, $\vec{F_3}$ et $\vec{F_4}$.

a. Reproduire le schéma et construire le projeté orthogonal de chaque vecteur sur la droite (AB).

b. Calculer le produit scalaire $\vec{F_k}\cdot\overrightarrow{AB}$ pour k allant de 1 à 4.

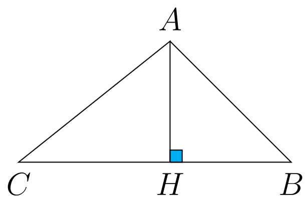
c. Vérifier la réponse donnée à la question **1**.



Partie A – Premiers calculs de produits scalaires

Exercice 1

Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. On a : $AB = 6$, $BH = 4$ et $HC = 5$.



Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$
3) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$
4) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$
5) $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{CB}$
6) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré de côté 5. Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

Exercice 3

Soit $ABCD$ un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = AD = 5$ et $DC = 7$.
Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

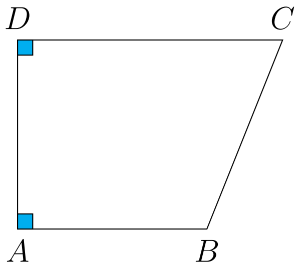
2) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$

4) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

5) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$

6) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$



Partie B – Propriétés algébriques

Exercice 4

Les écritures suivantes n'ont pas de signification mathématique. Pour quelle(s) raison(s) ?

1) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{v}$ **2)** $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{v})$ **3)** $\vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{v})$ **4)** $\vec{v} \cdot \overrightarrow{u+v}$

Exercice 5

On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$.
Calculer chacune des expressions suivantes.

1) $\vec{u} \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$

2) $(5\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v}$

3) $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v})$

4) $(3\vec{u} - 2\vec{v})^2$

5) $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$

6) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) - (\vec{v} + \vec{u}) \cdot \vec{v}$

7) $\|2\vec{u} - \vec{v}\|^2$

8) $\|\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - 3\vec{v}\|^2$

Partie C – Autres calculs de produits scalaires

Exercice 6

Dans chacun des deux cas suivants, déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{ACB}$.

1) $CA = 8$, $CB = 4$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 12$. **2)** $CA = 5$, $CB = 8$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -6$.

Exercice 7

On se place dans un repère orthonormé. Soient les points $A(0\,;4)$, $B(6\,;3)$ et $C(-5\,;-2)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.

2) En déduire une valeur en degrés de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 8

$ABCD$ est un parallélogramme tel que : $AB = 4$, $AD = 2$ et $\widehat{BAD} = 45°$.

1) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.

2) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.