Première – Chapitre 3

PRODUIT SCALAIRE

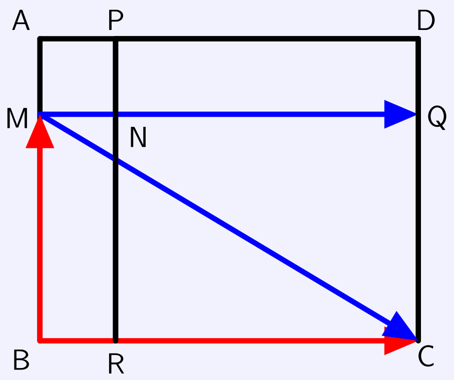
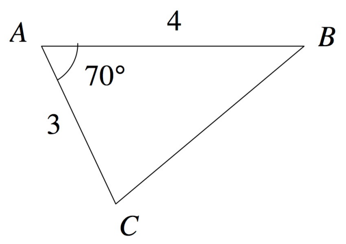


Table des matières

I Expressions du produit scalaire

1) Exercice de motivation



Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 70\,^{\circ}$. Calculer BC.

Problème : on ne peut pas utiliser le théorème de Pythagore car le triangle n'est pas rectangle. On verra, à la fin de ce chapitre, que le produit scalaire offre une solution à ce problème en généralisant le théorème de Pythagore à tout triangle.

2) Norme d'un vecteur

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, et A et B deux points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la longueur du segment $[AB]$. On a : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

REMARQUE

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;y)$, alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

PROPRIÉTÉS **admises**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
- Pour tout réel k, on a : $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$. On a notamment $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leqslant \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (inégalité triangulaire)
- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{0}$.

3) Produit scalaire de deux vecteurs : une première expression

DÉFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, le nombre **réel** noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (« $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ») et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Conséquences immédiates :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
2. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$. On le note parfois $\vec{u}^2$ mais c'est moche et ambigu...
3. Si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. **Attention, la réciproque est fausse !**

PROPRIÉTÉ **admise**

On a aussi :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

4) Une deuxième expression : l'expression analytique

PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère **orthonormé** $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Si $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$, alors

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

DÉMONSTRATION

$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2$ et $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2$.
$\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $(x+x'\,;y+y')$, donc $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2$.
Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left((x+x')^2 + (y+y')^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2\right) = \ldots = xx' + yy'$.

REMARQUE

Attention, l'expression analytique n'est valable **que** dans un repère **orthonormé** !

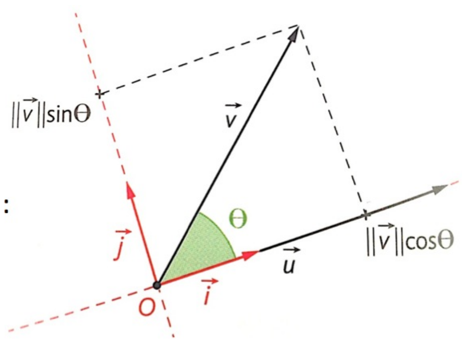
5) Une troisième expression : avec les normes et un angle

PROPRIÉTÉ

Soient A, B et C trois points distincts du plan. Alors on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AB \times \cos\widehat{BAC}$$

DÉMONSTRATION



(attention à adapter les noms sur la figure)

Soit O un point du plan.
On pose $\vec{i} = \dfrac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}$ le vecteur tel que $(\vec{i},\vec{j}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $\|\vec{j}\| = 1$.
Le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est donc un repère **orthonormé** dans lequel on a : $\overrightarrow{AB}(AB\,;0)$ et $\overrightarrow{AC}(AC\cos(\widehat{BAC})\,;AC\sin(\widehat{BAC}))$

En utilisant l'expression analytique du produit scalaire, on a alors :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) + 0 \times AC\sin(\widehat{BAC})\\ &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).\end{aligned}$$

En notant $(\vec{u},\vec{v})$ l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (on parle alors d' « angle orienté », car cet angle est muni d'un sens : de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$), on peut réécrire la propriété précédente avec des vecteurs :

PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$$

6) Une quatrième expression : pour des vecteurs colinéaires

PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de sens contraire**, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

DÉMONSTRATION

La démonstration se fait à partir de la troisième expression du produit scalaire :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $(\vec{u}\,,\vec{v}) = 0$, donc $\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = 1$.

Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times 1 = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de sens contraire**, alors $(\vec{u}\,,\vec{v}) = \pi$, donc $\cos(\vec{u}\,,\vec{v}) = -1$.

Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times (-1) = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.

7) Une cinquième expression : à l'aide du projeté orthogonal

DÉFINITION

Soit M un point du plan et d une droite du plan. On appelle projeté orthogonal du point M sur la droite d le point M' tel que les droites (MM') et d soient perpendiculaires.
En particulier, si $M \in d$, alors son projeté orthogonal sur d est lui-même.

PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On note A, B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$, où C' est le projeté orthogonal de C sur (AB).

DÉMONSTRATION

La démonstration sera faite dans le II.

REMARQUES

1) On a aussi $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC}$, où B' est le projeté orthogonal de B sur (AC).

2) Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan, et C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB).
Alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.
On dit que $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur (AB).

II Propriétés du produit scalaire

1) Produit scalaire et orthogonalité

a Vecteurs orthogonaux

DÉFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, et A, B, C et D quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

b Lien avec le produit scalaire

THÉORÈME

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

REMARQUE

Le vecteur nul est considéré comme orthogonal à tout vecteur du plan.

DÉMONSTRATION

Posons A, B et C trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = 0 \Leftrightarrow ||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$.
Or $||\vec{u}||^2 = BA^2$, $||\vec{v}||^2 = AC^2$ et $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}||^2 = ||\overrightarrow{BC}||^2 = BC^2$.
Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A.
Conclusion : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Conséquence du théorème :
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

2) Produit scalaire et opérations

PROPRIÉTÉ

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et tout nombre réel k, on a :

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
3. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$

DÉMONSTRATION

Les démonstrations se font rapidement à l'aide de la forme analytique.

PROPRIÉTÉ

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
2. $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$
3. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

DÉMONSTRATION

Les démonstrations se font rapidement à l'aide de la propriété précédente.

3) Démonstration de la cinquième expression (projeté orthogonal)

A l'aide des opérations algébriques énoncées ci-dessus, on peut désormais démontrer la cinquième expression du produit scalaire :

DÉMONSTRATION

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'C}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'C}$.
Or les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'C}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'C} = 0$.
Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}$.

III Applications du produit scalaire en géométrie analytique

Dans toute cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé.

1) Retour sur la notion d'équation de droite

a équation réduite, équations cartésiennes

PROPRIÉTÉ & DÉFINITION

Soit a et b deux réels.
L'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $y = ax+b$ est une droite.
L'égalité $y = ax+b$ est appelée **l'équation réduite** de la droite. Elle est unique.
a est appelé **le coefficient directeur** de la droite, et b son **ordonnée à l'origine**.

REMARQUES

- Une équation de droite est donc une égalité vérifiée par les coordonnées de tous les points appartenant à cette droite : si d est une droite d'équation $y = ax+b$, alors $A(x_A\,;y_A) \in d \iff y_A = ax_A + b$.
- Si $b = 0$, alors la droite d'équation $y = ax$ passe par l'origine du repère.
- Si $a = 0$, alors la droite d'équation $y = b$ est parallèle à l'axe des abscisses.
- Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a pour équation $x = c$, où c est un réel.
- $y = ax+b \iff ax - y + b = 0$. Une telle équation est appelée **équation cartésienne**. Elle n'est pas unique. Par exemple, $2x+y+5 = 0$ et $4x+2y+10 = 0$ sont deux équations cartésiennes d'une même droite.

b Déterminer une équation de droite avec le coefficient directeur

PROPRIÉTÉ admise

Soient A et B deux points d'abscisses distinctes dans le plan.
Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

REMARQUE

Cas particulier : si $x_A = x_B$, la droite (AB) est parallèle à l'axe des ordonnées, et n'a pas de coefficient directeur.

EXERCICE

On considère les points $A(3\,;2)$, $B(-1\,;4)$ et $C(3\,;4)$.
Déterminer une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes : (AB), (AC) et (BC).

c Déterminer une équation de droite avec un vecteur directeur

DÉFINITION

On appelle **vecteur directeur** d'une droite d tout vecteur non nul dont la direction est celle de la droite d.

REMARQUES

- Une droite a une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires deux à deux.
- Si A et B sont deux points distincts de la droite d, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite d.
- Soit d une droite passant par un point A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Alors pour tout point M de d, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. (*Faire une figure*)

PROPRIÉTÉ admise

Soient a, b et c trois réels.
L'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$.

EXEMPLE

Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(4\,;5)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;3)$:

$$M(x\,;y) \in d \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-4 \\ y-5 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ y-5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow 3(x-4) - (-1)(y-5) = 0$$

$$\Longleftrightarrow 3x - 12 + y - 5 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{3x + y - 17 = 0}$$

EXERCICE

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(-2;3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(1;4)$
2. Soit d la droite d'équation cartésienne $-3x+2y+5=0$.
   (a) Le point $B(1;-1)$ appartient-il à la droite d ?
   (b) Donner un vecteur directeur de la droite d.
   (c) Donner une autre équation de la droite d, et son équation réduite.
   (d) La droite $d' : 6x-4y+1=0$ est-elle parallèle à la droite d ?

2) Produit scalaire et équation de droite

a Définition d'un vecteur normal à une droite

DÉFINITION

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un **vecteur normal** à la droite d est un vecteur non nul orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

PROPRIÉTÉ

Soit d une droite passant par un point A du plan et de vecteur normal $\vec{n}$.
Alors la droite d est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$.

b Équation d'une droite de vecteur normal

THÉORÈME

Soit a et b deux nombres réels non nuls tous les deux (c'est-à-dire tels que $(a,b)\neq(0,0)$.
La droite d admet le vecteur $\vec{n}(a;b)$ pour vecteur normal si et seulement si elle admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec c un réel.

DÉMONSTRATION

Soit $A(x_A;y_A)$ un point de d et $\vec{n}$ un vecteur normal de d de coordonnées $(a;b)$.
Alors $M(x;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow (x-x_A)\times a+(y-y_A)\times b=0 \Leftrightarrow ax+by+c=0$ avec $c=-ax_A+by_A$.

EXERCICE

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit d la droite passant par le point $S(5;8)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de d.
2. (a) Démontrer que le point $R(-11;0)$ appartient à la droite d.
   (b) Que peut-on alors dire du vecteur $\overrightarrow{RS}$ pour la droite d ?
   (c) En déduire, sans calcul, la valeur de $\overrightarrow{RS}\cdot\vec{n}$.
3. Le point $T(-9;2)$ appartient-il à la droite d ?
4. Déterminer une équation cartésienne de la droite d', droite parallèle à d et passant par T, de deux façons différentes.
5. Soit d_2 la droite d'équation $-x+2y+3=0$. Démontrer que d_2 et d sont parallèles.
6. Soit d_3 la droite d'équation $4x-8y+5=0$. Démontrer que d_3 et d sont parallèles.
7. Soit d_4 la droite d'équation $6x+3y-1=0$. Démontrer que d_4 et d sont perpendiculaires.

EXERCICE

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soient les points $A(-1;1)$, $B(5;6)$ et $C(8;-3)$.
Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).

1. Réaliser une figure et conjecturer par lecture graphique les coordonnées du point H.
2. On cherche à déterminer par le calcul les coordonnées de H :
   (a) Déterminer une équation de la droite (BC).
   (b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AH).
   (c) En déduire les coordonnées du point H.

3) Équation d'un cercle

PROPRIÉTÉ

Soit C le cercle de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon R.
Une équation cartésienne de C est :

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$$

DÉMONSTRATION

$M(x;y)\in C \Leftrightarrow AM=R \Leftrightarrow AM^2=R^2 \Leftrightarrow (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2.$

EXERCICE

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(3\,;-5)$ et le cercle C de centre A et de rayon 2.

1. Déterminer une équation cartésienne de C.
2. Le point $B(2\,;5)$ appartient-il au cercle C ?

EXERCICE

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère l'ensemble E des points $M(x\,;y)$ tel que $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$.
L'ensemble E est-il un cercle ? Si oui, préciser son rayon et les coordonnées de son centre.

PROPRIÉTÉ

Le cercle C de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

DÉMONSTRATION

Dire que M appartient au cercle C signifie que M est confondu avec A ou B, ou que $(MA) \perp (MB)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

EXERCICE

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(4\,;-5)$ et $B(2:0)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle C de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer les coordonnées du centre Ω de ce cercle C, et le rayon du cercle C.

IV Applications du produit scalaire pour le calcul de longueurs et de mesures d'angles

1) Théorème de la médiane

THÉORÈME

Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \qquad MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

DÉMONSTRATION

$$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2.$$

2) Théorème d'Al-Kashi

THÉORÈME

Soit ABC un triangle quelconque. Alors on a :

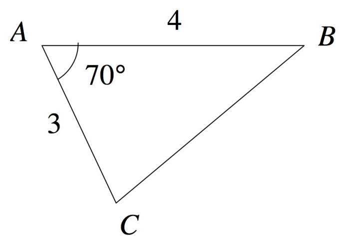
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos \widehat{ABC}$$
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{CAB}$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} AB^2 &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 \\ &= (-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})^2 \\ &= AC^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos \widehat{ACB}. \end{aligned}$$

EXERCICE

On peut donc enfin (ouf !) répondre au problème de motivation énoncé en début de chapitre !



Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 70\,^\circ$.

Calculer BC.