Première – Chapitre 2

TRIGONOMÉTRIE

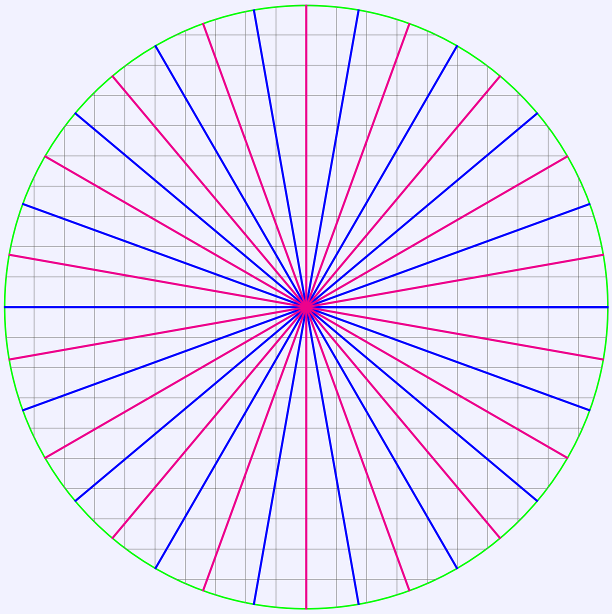


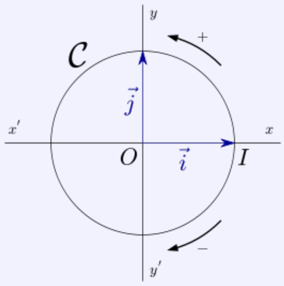
Table des matières

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

I Le cercle trigonométrique et le radian

1) Définition

DÉFINITION



On appelle **cercle trigonométrique** le cercle C de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi un sens de parcours, appelé le **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre).

2) Longueur d'un arc de cercle

La longueur d'un cercle de rayon R est donnée par la formule $2\pi R$.
Or le cercle trigonométrique a pour rayon $R = 1$, donc sa longueur est de 2π.
Son demi-cercle a donc pour longueur π et son quart de cercle a pour longueur $\dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi, tout point M du cercle trigonométrique peut-être défini par la longueur de l'arc $\widehat{IM}$.

PROPRIÉTÉ

La longueur d'un arc de cercle et la mesure en degré de l'angle au centre qui l'intercepte sont proportionnelles.

Mesure de l'angle au centre	360	180	90	45	0
Longueur de l'arc intercepté	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0

DÉMONSTRATION

Simple proportionnalité.

3) Le radian

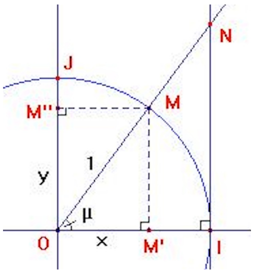
DÉFINITION

Soit C un cercle trigonométrique de centre O dans un repère $(O\,;I\,;J)$.
Le **radian** (symbole : rad) est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle C un arc de longueur 1.

EXEMPLE

Sur le cercle trigonométrique de la définition, l'angle $\widehat{IOJ}$ mesure 90 degrés, mais aussi $\dfrac{\pi}{2}$ radians.

4) Enroulement de la droite des réels



Soit d la tangente à C au point $I(1\,;0)$.
Alors tout point N de d est repéré par un unique réel x.
(d peut être assimilée à un axe gradué)
En enroulant la droite d sur le cercle C, on associe à tout réel x un unique point $M(x)$ du cercle C et on dit que x est une mesure de l'angle $\widehat{IOM}$.

EXEMPLE

Sur un cercle trigonométrique, placer les points $I(0)$, $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $K(\pi)$, $L\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, $M(2\pi)$, $N\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $P\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, les points $M(x)$ et $M'(x+k\times 2\pi)$ du cercle trigonométrique sont confondus.

DÉMONSTRATION

La longueur du cercle trigonométrique étant égale à 2π, le résultat est immédiat.

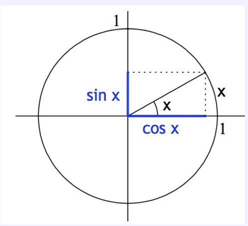
EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, I et M sont confondus, et N et L sont confondus.

II Cosinus et sinus d'un réel

1) Cosinus, sinus et cercle trigonométrique

DÉFINITION



Soit C le cercle trigonométrique de centre O dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit x un réel et M le point de C associé à x.

On appelle **cosinus** de x et **sinus** de x, notés $\cos x$ et $\sin x$, l'abscisse et l'ordonnée de M dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On le note : $M(\cos x\,;\sin x)$, ou encore : $\overrightarrow{OM} = \cos x \times \vec{\imath} + \sin x \times \vec{\jmath}$.

2) Propriétés

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x, $\quad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \quad$ et $\quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

DÉMONSTRATION

$\cos(x)$ est l'abscisse d'un point M du cercle trigonométrique, cercle dont le centre est O et le rayon vaut 1. Quelle que soit la position du point M sur ce cercle, cette abscisse varie donc de -1 à 1, donc on a bien pour tout réel x, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

Même raisonnement pour $\sin(x)$, qui est l'ordonnée d'un point de ce cercle.

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

DÉMONSTRATION

Si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, alors d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMH, où H est le point de $[OI]$ tel que $(MH) \perp (OI)$, on a $OM^2 = OH^2 + HM^2$, donc $1^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$, soit $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. On admet le résultat pour les autres valeurs de x.

PROPRIÉTÉ

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$.

DÉMONSTRATION

Par considération géométrique sur le cercle trigonométrique.

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x :

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

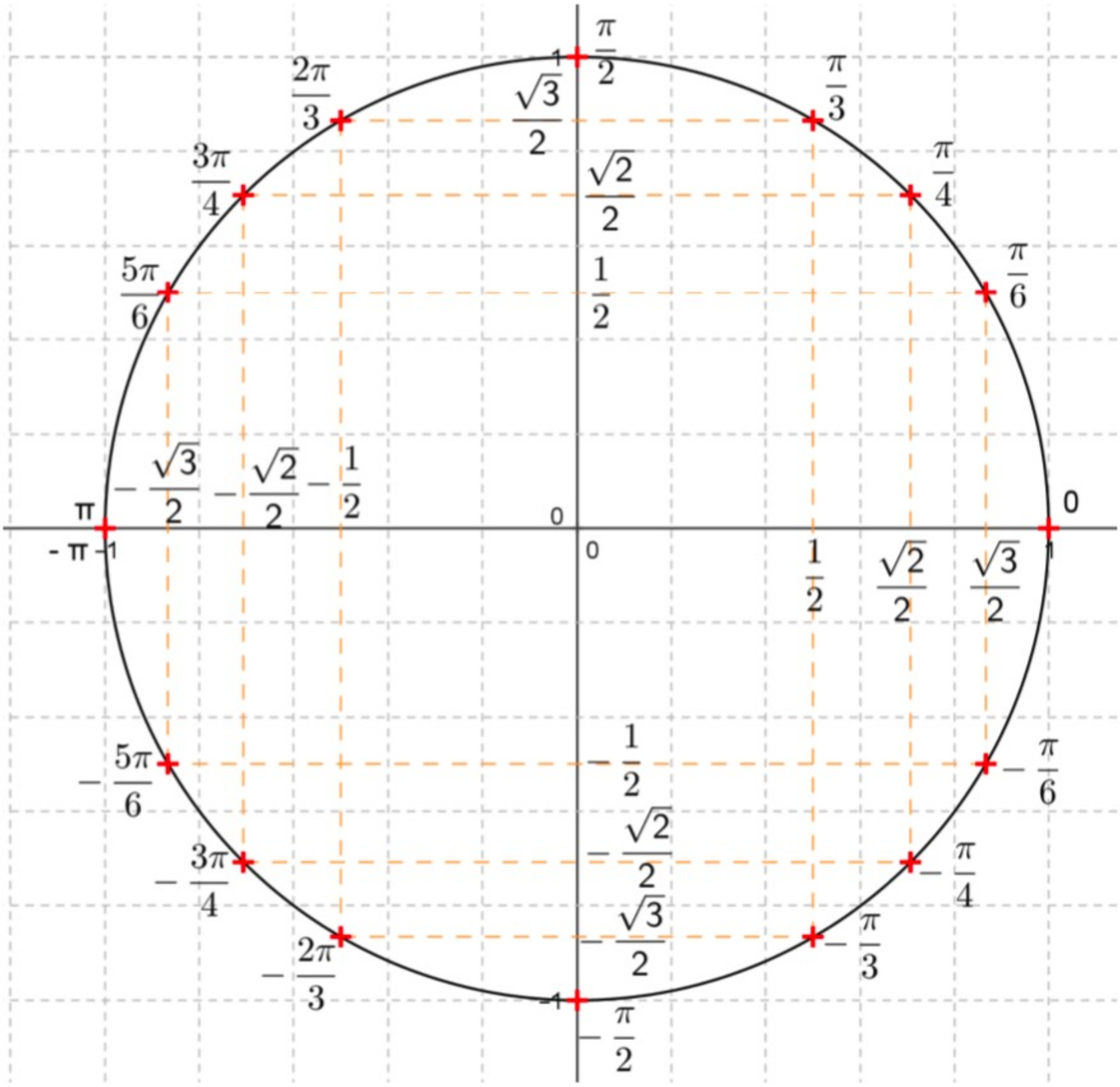
$\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin(\pi + x) = -\sin x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$

DÉMONSTRATION

Par considération géométrique sur le cercle trigonométrique.

3) cercle trigonométrique et valeurs à connaître

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



DÉMONSTRATIONS

Démonstration pour $\frac{\pi}{4}$:

Soit $ABCD$ un carré de côté de longueur a, avec a un réel strictement positif.

1. Déterminer la mesure en radian des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$.
2. Déterminer en fonction de a la longueur AC.
3. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Démonstration pour $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$:

Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a, avec a un réel strictement positif, et soit H le pied de la hauteur du triangle issue de A.

1. Déterminer la mesure en radian des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BAH}$.
2. Déterminer en fonction de a la longueur AH.
3. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.