Première – Chapitre 2

TRIGONOMÉTRIE

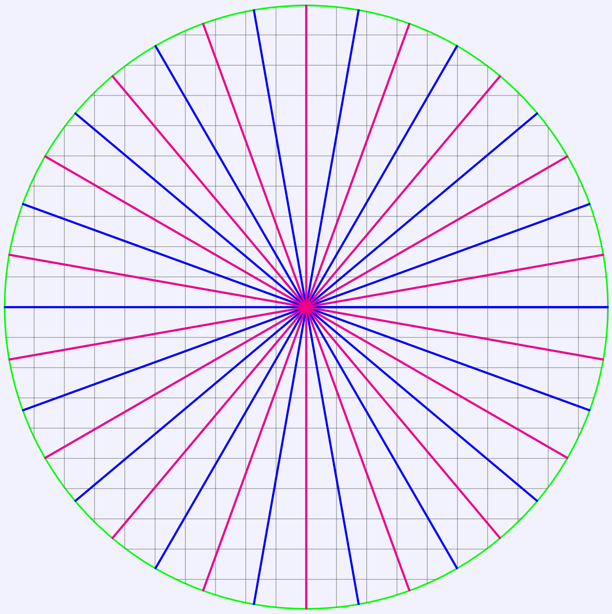


Table des matières

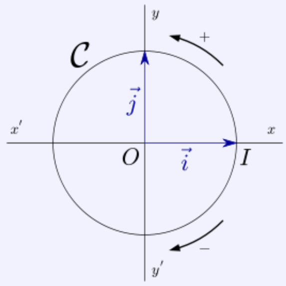
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

I Le cercle trigonométrique et le radian

1) Définition

DÉFINITION

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle C de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi un sens de parcours, appelé le **sens direct** (sens inverse des aiguilles d'une montre).



2) Longueur d'un arc de cercle

La longueur d'un cercle de rayon R est donnée par la formule $2\pi R$.
Or le cercle trigonométrique a pour rayon $R = 1$, donc sa longueur est de 2π.
Son demi-cercle a donc pour longueur π et son quart de cercle a pour longueur $\dfrac{\pi}{2}$.
Ainsi, tout point M du cercle trigonométrique peut-être défini par la longueur de l'arc $\widehat{IM}$.

PROPRIÉTÉ

La longueur d'un arc de cercle et la mesure en degré de l'angle au centre qui l'intercepte sont proportionnelles.

Mesure de l'angle au centre	360	180	90	45	0
Longueur de l'arc intercepté	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0

3) Le radian

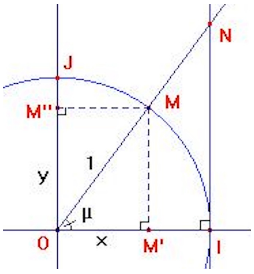
DÉFINITION

Soit C un cercle trigonométrique de centre O dans un repère $(O\,;I\,;J)$.
Le **radian** (symbole : rad) est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle C un arc de longueur 1.
(Faire une figure)

EXEMPLE

Sur le cercle trigonométrique de la définition, l'angle $\widehat{IOJ}$ mesure 90 degrés, mais aussi $\dfrac{\pi}{2}$ radians.

4) Enroulement de la droite des réels



Soit d la tangente à C au point $I(1\,;0)$.
Alors tout point N de d est repéré par un unique réel x.
(d peut être assimilée à un axe gradué)
En enroulant la droite d sur le cercle C, on associe à tout réel x un unique point $M(x)$ du cercle C et on dit que x est une mesure de l'angle $\widehat{IOM}$.

EXEMPLE

Tracer un cercle trigonométrique et placer les points $I(0)$, $J(\frac{\pi}{2})$, $K(\pi)$, $L(\frac{3\pi}{2})$, $M(2\pi)$, $N(-\frac{\pi}{2})$, $P(-\frac{3\pi}{4})$.

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, les points $M(x)$ et $M'(x+k\times 2\pi)$ du cercle trigonométrique sont confondus.

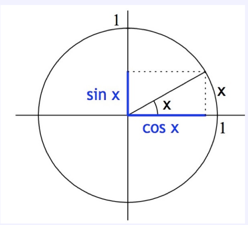
EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, I et M sont confondus, et N et L sont confondus.

II Cosinus et sinus d'un réel

1) Cosinus, sinus et cercle trigonométrique

DÉFINITION



Soit C le cercle trigonométrique de centre O dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Soit x un réel et M le point de C associé à x.

On appelle **cosinus** de x et **sinus** de x, notés $\cos x$ et $\sin x$, l'abscisse et l'ordonnée de M dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On le note : $M(\cos x\,;\sin x)$, ou encore : $\overrightarrow{OM} = \cos x \times \vec{i} + \sin x \times \vec{j}$.

2) Propriétés

PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x, on a :
$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$; $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

DÉMONSTRATION

Faire une démonstration rapide et à l'aide du triangle rectangle.

PROPRIÉTÉ

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$.

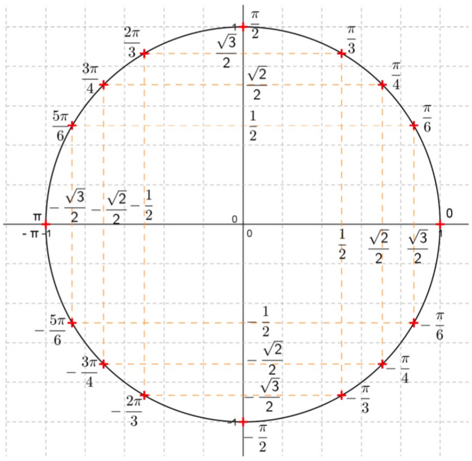
PROPRIÉTÉ

Pour tout réel x :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x \quad ; \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \quad ; \quad \sin(\pi + x) = -\cos x \quad ; \quad \cos(\pi + x) = -\sin x$$

3) cercle trigonométrique et valeurs à connaître

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1



DÉMONSTRATIONS

Démonstration pour $\frac{\pi}{4}$:
Soit $ABCD$ un carré de côté de longueur a, avec a un réel strictement positif.

1. Déterminer la mesure en radian des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$.
2. Déterminer en fonction de a la longueur AC.
3. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Démonstration pour $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$:
Soit ABC un triangle équilatéral de côté de longueur a, avec a un réel strictement positif, et soit H le pied de la hauteur du triangle issue de A.

1. Déterminer la mesure en radian des angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BAH}$.
2. Déterminer en fonction de a la longueur AH.
3. En déduire la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.