I Introduction

Exercice 1 Formes développées

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes, où x est un réel quelconque.

- $f(x) = (-3x+1)(x+2)$
- $g(x) = (5x-3)(3+6x)$
- $h(x) = (2x-5)^2 + (x-4)(x+4)$
- $k(x) = 3 - 2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2$

Exercice 2 Résolution d'équations

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = 25$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 = 9$.

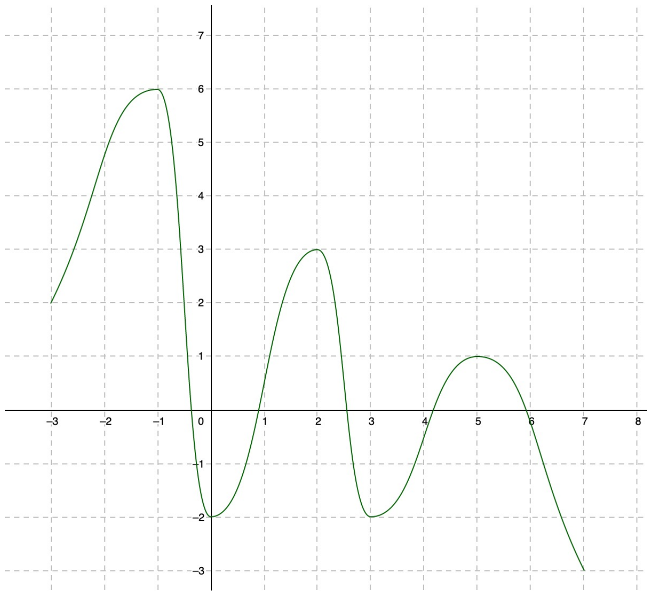
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(2x+5)(x-3) = 0$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(5-2x)(x+3) = 0$.

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{4x+3}{5-2x} \geqslant 0$.

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{5-3x}{2x-2} \geqslant 0$.

Exercice 3 Lectures graphiques



Soit f une fonction définie sur $[-3\,;7]$ et dont la courbe est représentée ci-contre.

1) Déterminer graphiquement et sans justifier les valeurs de $f(-2)$ et $f(6)$.

2) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 1$ sur $[-3\,;7]$ (on ne demande pas de justification).

3) Dresser, sans justifier, le tableau de variations de la fonction f sur $[-3\,;7]$.

Exercice 4 La meilleure forme

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3(x-1)(x+2)$.

1) Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

2) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{27}{4}$.

3) En utilisant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :

- **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
- **b)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = -6$.
- **c)** Calculer l'image de $\sqrt{2}$ par f.
- **d)** Calculer l'image de $-\dfrac{1}{2}$ par f.

II Forme factorisée et racines

Exercice 5

Soit f la fonction polynôme du second degré telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$ et $f(0) = 1$.
Déterminer l'expression de $f(x)$ sous forme factorisée, puis sous forme développée.

Exercice 6

Soit g une fonction polynôme du second degré. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -3 et 4 et passe par le point $A(3\,;2)$.
Déterminer l'expression de $g(x)$ sous forme factorisée, puis sous forme développée.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 - 9x + 30$.

1) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = (-3x + 6)(x + 5)$.

2) En déduire les racines de f.

3) Déterminer la fonction polynôme du second degré g ayant les mêmes racines que f et telle que $g(0) = 20$.

Exercice 8

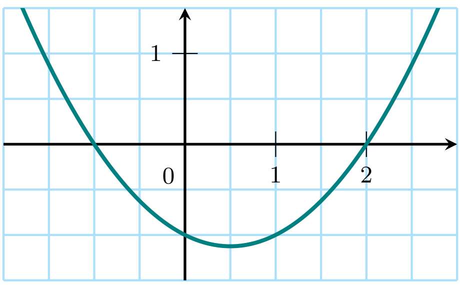
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(1) = 1$, $f(-2) = 4$ et $f(0) = 6$.
Soit g la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x^2$.

1) Calculer $g(1)$, $g(-2)$ et $g(0)$.

2) En déduire une factorisation de $g(x)$.

3) En déduire alors l'expression de $f(x)$ sous forme développée.

Exercice 9



f est une fonction polynôme du second degré dont une partie de la courbe représentative est donnée ci-contre.
Déterminer la forme factorisée puis la forme développée de $f(x)$.

III Forme canonique

Exercice 10

Déterminer dans chacun des cas la forme canonique de la fonction polynôme du second degré f :

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$	(4) $f(x) = 4x^2 - 64x - 40$	(7) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$
(2) $f(x) = 3x^2 + 9x - 4$	(5) $f(x) = -2x^2 + 6x + 2$	(8) $f(x) = -4x^2 + 3x + 5$
(3) $f(x) = -2x^2 + 8x - 2$	(6) $f(x) = x^2 + x + 1$	(9) $f(x) = -2x^2 + 5x$

Exercice 11

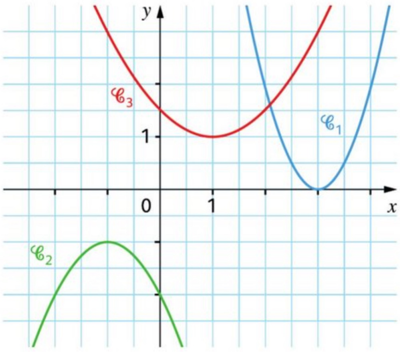
Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 7x + 1$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

2) En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3) Donner l'équation de l'axe de symétrie de $\mathcal{C}$ et les coordonnées du sommet S de $\mathcal{C}$.

Exercice 12



Les fonctions f, g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -(x+1)^2 - 1$

$g(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + 1$

$h(x) = 2(x-3)^2$

On donne ci-contre leurs courbes représentatives.
Associer, en justifiant, chaque fonction à sa courbe.

IV Résolution d'équations

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes, sans utiliser le discriminant :

(1) $(3x-1)(2x+3) = 0$

(2) $5x^2 - 4 = 1$

(3) $(x-2)^2 - (4-3x)^2 = 0$

(4) $5x^2 - 3x = 0$

(5) $-4x^2 - 6 = 0$

(6) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

(7) $-9x^2 + 24x - 16 = 0$

(8) $-4x^2 + 3x + 8 = 4(x+2)$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(1) $3x^2 + 2x + 5 = 0$

(2) $3x^2 - 15x + 18 = 0$

(3) $-2x^2 - x + 1 = 0$

(4) $4x^2 + 2x - \dfrac{3}{4} = 0$

(5) $5x^2 - 2x - 3 = 0$

(6) $9x^2 + 30x + 25 = 0$

(7) $-4x^2 + x + 2 = 0$

(8) $5x^2 + 5x - 1 = 0$

(9) $2x^2 + 5 = 0$

Exercice 15

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^2 + x + 5$.

1) Déterminer la forme canonique de $f(x)$.

2) Déterminer les racines de $f(x)$ et en déduire la forme factorisée de $f(x)$.

3) En utilisant la forme de $f(x)$ la plus adaptée :

- **a)** Calculer l'image de 0 et l'image de $\sqrt{2}$ par f.
- **b)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations $f(x) = 5$ et $f(x) = \dfrac{81}{16}$.
- **c)** Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- **d)** Déterminer l'extremum de la fonction f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

Exercice 16

On se propose de résoudre l'équation (E) : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

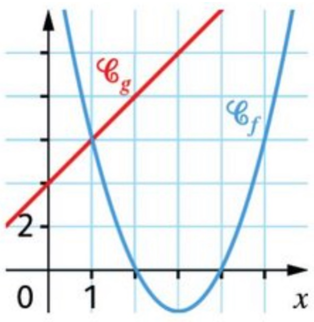
1) On pose $X = x^2$. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation (E') : $X^2 - 5X + 4 = 0$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E').

3) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E).

4) En suivant le même modèle de résolution, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(a) $2x^4 + 7x^2 - 15 = 0$ (b) $4x^4 - 13x^2 + 3 = 0$

Exercice 17



On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ et $g(x) = 2x + 4$.
Leurs représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont données ci-contre.

1) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.

2) Justifier que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = 2x^2 - 14x + 12$, puis déterminer la forme factorisée de $f(x) - g(x)$.

3) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4) Déterminer l'intervalle sur lequel $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de $\mathcal{C}_g$.

Exercice 18

Une entreprise fabrique et vend quotidiennement entre 0 et 1 000 pièces pour l'industrie automobile.
Le coût total de production de x pièces est donné, en euro, par $C(x) = 0,1x^2 + 10x + 1500$.
Chaque pièce est vendu au prix unitaire de 87 euros.

1) Montrer que le bénéfice, en euros, pour la vente de x pièces est $B(x) = -0,1x^2 + 77x - 1500$.

2) Déterminer les points morts de la production, c'est-à-dire le nombre de pièces pour lequel le bénéfice est nul.

3) Déterminer la quantité de pièces que doit vendre cette entreprise pour réaliser un bénéfice de 6 300 euros.

4) Déterminer la forme canonique de $B(x)$.

5) Déterminer la quantité de pièces à vendre pour réaliser un bénéfice maximum. Quel est ce bénéfice ?

Exercice 19

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et réalisée dans le programme Python suivant :

```python
def f(x):
    a=x+1
    b=5*x
    return -3*a**2+5*b-4
```

1) Exprimer $f(x)$ en fonction de x, puis donner sa forme développée.

2) Quelle(s) valeur(s) de x faut-il entrer dans la fonction `f` pour obtenir comme résultat final -1 ?

Exercice 20

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

2) Factoriser $x^2 - 3x + 2$.

3) Pour tout réel x de D, simplifier alors l'expression de $f(x)$.

Exercice 21

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3x-4}{x^2-5x-6}$.

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
$(2x+3)(-x^2+3x-2) = 0$; $(4x^2-3x+1)(2x^2+3x+1) = 0$; $(4x^2-1)(2x^2-5x-1) = 0$

Exercice 23

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$.

1) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = (2x-1)(3x^2-5x+2)$.

2) Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.

Exercice 24

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux équations suivantes :
$x + \dfrac{1}{x} = 3$; $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2} = 2$.

V Inéquations et signe du trinôme

Exercice 25

Déterminer le signe des polynômes suivants, tous définis sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ $\quad$ $k(x) = -x^2 + 5x + 1$ $\quad$ $q(x) = (2x+3)(x^2-5x+4)$

$g(x) = 2x^2 - x - 3$ $\quad$ $m(x) = x^2 - 5x$ $\quad$ $w(x) = (x^2-3x+4)(x-1)$

$h(x) = -3x^2 - 7x - 2$ $\quad$ $n(x) = 3x^2 + 7x$ $\quad$ $z(x) = (x^2-3x+2)(2x^2-7x+3)$

Exercice 26

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$-2x^2 + 7x + 4 > 0$ $\quad$ $4x^2 + 5x + 6 > 0$ $\quad$ $5x^2 + 4x - 1 > 0$

$-2x^2 + 7x + 4 \geqslant 0$ $\quad$ $4x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$ $\quad$ $5x^2 + 4x - 1 \geqslant 0$

$-2x^2 + 7x + 4 < 0$ $\quad$ $4x^2 + 5x + 6 < 0$ $\quad$ $5x^2 + 4x - 1 < 0$

$-2x^2 + 7x + 4 \leqslant 0$ $\quad$ $4x^2 + 5x + 6 \leqslant 0$ $\quad$ $5x^2 + 4x - 1 \leqslant 0$

Exercice 27

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les deux inéquations suivantes :

$\dfrac{2x-3}{-2x^2+9x-4} \geqslant 0$; $\dfrac{2x^2-12x-17}{-x+4} \leqslant 1$.

Exercice 28

Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g définies par :
$f(x) = \sqrt{3x^2-5x+2}$ et $g(x) = \dfrac{\sqrt{3x+4}}{x^2-5x+1}$.

VI Exercices de fin de chapitre

Exercice 29

1) f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 2x - 1$.

a) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = (2x+1)(ax^2+bx+c)$, où a, b et c sont des réels à déterminer.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

2) f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 - \frac{9}{4}x + 9$.

a) Démontrer que pour tout réel x, $f(x) = (x-4)(ax^2+bx+c)$, où a, b et c sont des réels à déterminer.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

3) On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 3$.

a) Calculer $P(3)$.

b) Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout réel x, $P(x) = (x-3)(ax^2+bx+c)$.

c) Dresser le tableau de signes de $P(x)$.

Exercice 30

Soit m un nombre réel. On considère l'équation $(E) : x^2 - 2x + m + 1 = 0$.
Déterminer, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de cette équation.

Exercice 31

Soit m un réel quelconque.
On considère le polynôme $P_m(x)$ défini pour tout réel x par $P_m(x) = 2x^2 + (m-5)x + m + 3$.
Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation $P_m(x) = 0$ admet-elle deux solutions réelles distinctes ?

VII Exercices du manuel

- 154 page 28
- TP page 33
- Bilan 1 page 37
- 114 page 60

VIII Un défi pour finir

Exercice 32

Déterminer deux entiers naturels dont la différence est 2 et la différence de leurs puissances cinquièmes est 2 882.