Première – Chapitre 1

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

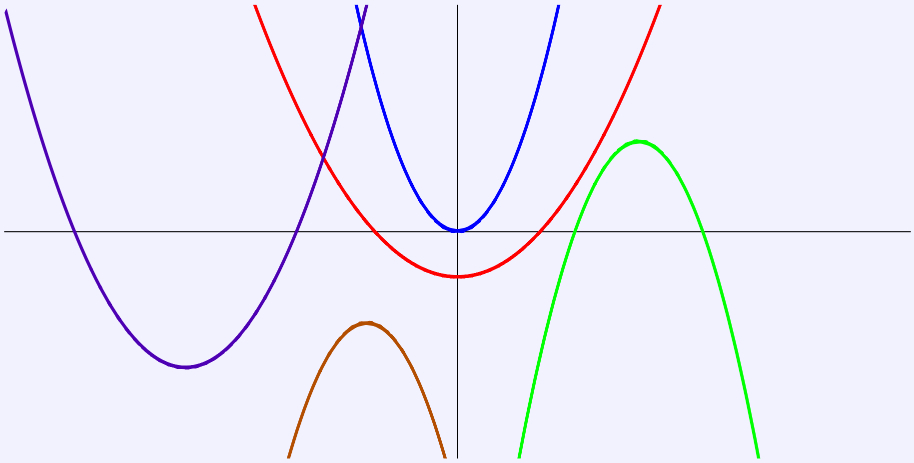

Table des matières

I Fonctions polynômes du second degré

1) Forme développée (ou réduite)

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que f est une fonction **polynôme du second degré**, ou fonction trinôme du second degré, si et seulement si il existe des réels a, b et c, avec $a \neq 0$, tels que pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Cette forme est appelée la forme **développée** (ou réduite) de $f(x)$.

REMARQUE

La forme développée d'une fonction polynôme du second degré est unique.

VOCABULAIRE

- f est une fonction et $f(x)$ est un réel (c'est l'image de x par la fonction f). Ainsi, les phrases « $f(x)$ est une fonction du second degré » ou « $f = ax^2 + bx + c$ » sont **fausses**.
- Si a, b et c sont des réels, avec $a \neq 0$, alors $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une **fonction polynôme** du second degré et $f(x) = ax^2 + bx + c$ est un **polynôme** du second degré.

EXEMPLES

- $f : x \mapsto -3x^2 + 5x - 1$.
- $g : x \mapsto 2(5 - x)(4x + 3)$. (Attention, ce n'est pas la forme développée de g ici)
- $h : x \mapsto 5x^2 + 2$.

CONTRE-EXEMPLES

- $f : x \mapsto 2x + 1$ (Fonction polynôme du premier degré)
- $g : x \mapsto 3x^3$ (Fonction polynôme du troisième degré)
- $h : x \mapsto 5x^2 + \dfrac{1}{x}$ (Fonction rationnelle)

2) Forme factorisée

DÉFINITION

Soit P une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$.
On appelle **racine du polynôme** $P(x)$ tout nombre réel x_0 tel que $\boldsymbol{P(x_0) = 0}$.

VOCABULAIRE

Autrement dit, x_0 est une racine de $P(x)$ si et seulement si x_0 est une solution de l'équation $P(x) = 0$.

EXEMPLE

Soit $P(x) = 2x^2 - 2x - 4$. Calculer $P(2)$ et conclure.
$P(2) = 2 \times 2^2 - 2 \times 2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$. Donc 2 est une racine de $P(x)$.

DÉFINITION

Soit $P(x)$ un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
On dit que $P(x)$ est mis sous **forme factorisée** si on peut l'écrire $\boldsymbol{P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$, où x_1 et x_2 sont deux réels (éventuellement égaux).

REMARQUE

Dans le cas où $P(x)$ admet bien une forme factorisée telle que définie ci-dessus, les réels x_1 et x_2 sont alors les deux racines du polynôme $P(x)$ et les deux seules. En effet :

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\iff a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \\ &\iff (x - x_1)(x - x_2) = 0 \text{ (car } a \neq 0) \\ &\iff x - x_1 = 0 \text{ ou } x - x_2 = 0 \\ &\iff x = x_1 \text{ ou } x = x_2 \end{aligned}$$

REMARQUE

Certains polynômes du second degré ne peuvent pas être mis sous forme factorisée.
Considérons par exemple le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 1$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$.
Donc l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et $P(x)$ n'a donc pas de racine réelle. Il ne peut donc pas être mis sous forme factorisée, car alors il aurait des racines (raisonnement immédiat par l'absurde).

3) Somme et produit des racines

THÉORÈME

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Si $P(x)$ admet deux racines x_1 et x_2 (éventuellement égales), alors on a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

DÉMONSTRATION

Si x_1 et x_2 sont les racines de $P(x)$, alors pour tout réel x, on a $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Donc $P(x) = a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2$.
Or pour tout réel x, on a aussi $P(x) = ax^2 + bx + c$.
La forme développée d'un polynôme étant unique, par identification, on a donc : $b = -a(x_1 + x_2)$ et $c = ax_1x_2$. Soit $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ $(a \neq 0)$.

L'un des objectifs de ce chapitre sera de déterminer les racines d'un polynôme du second degré donné sous forme développée. Autrement dit, savoir passer de la forme développée à la forme factorisée, ou encore savoir résoudre une équation dite du second degré. C'est ce que nous allons voir dans la suite. Pour cela, nous allons introduire une troisième forme possible d'un polynôme du second degré, la forme canonique.

4) Forme canonique

PROPRIÉTÉ & DÉFINITION

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$. Alors pour tout réel x :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

Cette écriture est appelée la **forme canonique** de f.

Ex 1 : Déterminer la forme canonique de $3x^2 + 6x + 1$.
Ex 2 : Déterminer la forme canonique de $-4x^2 + 5x - 2$.

Généralisons le procédé pour tout polynôme du second degré :

DÉMONSTRATION

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Pour tout réel x, on a :

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ (car $a \neq 0$)

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$

$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$
(On vérifie facilement par le calcul que $f(\alpha) = \beta$)

EXEMPLE

Déterminer la forme canonique des fonctions $f : x \mapsto 3x^2 - 6x + 1$ et $g : x \mapsto -2x^2 + 5x + 3$.

5) Variations et courbe représentative

PROPRIÉTÉ

Soit f une fonction polynôme du second degré dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec a, α et β des réels et $a \neq 0$. Alors son tableau de variation est :

Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↘	β	↗	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↗	β	↘	

DÉMONSTRATION

Exercice 28 page 52 du manuel Déclic.

Représentation graphique :
Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré de la forme $x \mapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ (a, α et β réels et $a \neq 0$), est une **parabole** de sommet le point $S(\alpha\,;\,\beta)$, et qui admet pour axe de symétrique la droite d'équation $x=\alpha$.

II Équations du second degré

1) Définition

DÉFINITION

On appelle **équation du second degré** toute équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec a, b et c des réels tels que $a \neq 0$.

2) Premiers exemples

On sait déjà résoudre certaines équations du second degré : toutes celles n'ayant que deux termes par exemple, ou celles dont le polynôme du second degré est déjà factorisé.

Ex 1 : $x^2=3$ $(b=0)$

Ex 2 : $4x^2-2x=0$ $(c=0)$

Ex 3 : $-5x^2=0$ $(b=0 \text{ et } c=0)$

Ex 4 : $(x-3)(x+1)=0$ (forme factorisée)

Ex 5 : $(3x+2)^2=0$ (carré nul)

Ex 6 : $x^2+5=0$ (pas de solution)

Ex 7 : $(4-5x)^2+3=0$ (idem, pas besoin de développer !)

Ex 8 : $x^2-2x+1=0$ (identité remarquable)

Ex 9 : $-2x^2+x+1=0$
Ici, le membre de droite est nul et le membre de gauche est constitué de trois termes, sans facteur commun ni reconnaissance d'une identité remarquable. Comment résoudre cette équation ? En utilisant (pour le moment !) la forme canonique :

$$-2x^2+x+1=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=-\frac{1}{2}$$

En passant par la forme canonique, on a réussi à factoriser le membre de gauche pour résoudre l'équation.
Généralisons ce procédé :

DÉMONSTRATION

D'après la forme canonique vue au **I 3**, l'équation $ax^2+bx+c=0$ est équivalente à l'équation $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=0$.
Posons $\Delta = b^2-4ac$.
Or $a \neq 0$ donc l'équation se ramène à $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}=0$, soit $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{(2a)^2}$.

- Si $\Delta<0$, alors $\dfrac{\Delta}{(2a)^2}<0$ donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta=0$, alors l'équation se ramène à $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$ d'où $x=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta>0$, alors $\dfrac{\Delta}{(2a)^2}=\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ et l'équation se ramène à :

$$\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0.$$

Ainsi, $x+\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x+\dfrac{b}{2a}=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, donc l'équation a deux solutions : $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

3) Discriminant et énoncé du théorème

DÉFINITION

Soit ax^2+bx+c un polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Le réel b^2-4ac, noté Δ, est appelé le **discriminant du polynôme** ax^2+bx+c

THÉORÈME

Soit a, b et c des réels, avec $a \neq 0$, et Δ le réel défini par $\Delta = b^2-4ac$.
Soit (E) l'équation $ax^2+bx+c=0$.

- Si $\Delta<0$, alors (E) n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta=0$, alors (E) admet une unique solution réelle $x_0=-\dfrac{b}{2a}$. On dit que cette solution est double.
- Si $\Delta>0$, alors (E) admet deux solutions réelles : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

REMARQUE

Les solutions, lorsqu'elles existent, sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2+bx+c$ et de l'axe des abscisses.

VOCABULAIRE

Les **solutions** de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont les **racines** du polynôme ax^2+bx+c.
ATTENTION À NE PAS CONFONDRE CES DEUX MOTS DE VOCABULAIRE !

4) Exemples rédigés

Ex 1 (cas où $\Delta > 0$) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x^2 + x + 1 = 0$
Ex 2 (cas où $\Delta < 0$) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 7x + 5 = 0$
Ex 3 (cas où $\Delta = 0$) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 - 8x - 16 = 0$

REMARQUE

Lorsque l'on obtient $\Delta = 0$, cela signifie que l'on est passé à côté d'une identité remarquable (le vérifier avec l'Ex 3).

5) Discriminant et forme factorisée

PROPRIÉTÉ

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, avec a, b et c des réels tels que $a \neq 0$, et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.
- Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double du trinôme.
- Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION

- Si $\Delta < 0$: admis.
- Si $\Delta = 0$, c'est évident à partir de la forme canonique.
- Si $\Delta > 0$, il faut développer $a(x - x_1)(x - x_2)$. (A faire en exercice)

III Signe d'un trinôme et inéquations du second degré

1) Conjecture graphique

Faire au tableau les trois configurations possibles si $a > 0$ puis si $a < 0$. et conjecturer oralement.

2) Énoncé du théorème

THÉORÈME

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a, sauf entre ses racines lorsqu'elles existent.
En particulier, lorsque $\Delta < 0$, le trinôme est de signe constant (celui de a).

DÉMONSTRATION

- Cas où $\Delta < 0$:

A l'aide de la forme canonique, $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
Or Δ est négatif, donc l'expression entre crochets est strictement positive, donc le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de a, pour tout réel x.

- Cas où $\Delta = 0$:

Alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ et pour tout réel x, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$.
Donc $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.

- Cas où $\Delta > 0$:

A l'aide de la forme factorisée, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
A l'aide d'un tableau de signe, en supposant que $x_1 < x_2$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

3) Inéquations du second degré

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$.
Une inéquation du second degré à une inconnue x est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes : $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leqslant 0$.
Pour résoudre une telle inéquation, on étudie le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$.

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$.