ÉCHANTILLONNAGE

Chapitre 10

Table des matières

I Intervalle de fluctuation

I 1 Retour sur une propriété vue en Seconde

Propriété 1 :
Si p est la proportion d'un caractère dans une population, avec $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$, alors pour un échantillon de taille n (avec $n \geqslant 25$), la fréquence f du caractère de l'échantillon appartient à l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'au moins $0,95$.

Exemple :

> On sait que 26% des Français sont allergiques aux pollens des fleurs. On décide d'interroger un échantillon de 400 personnes : on trouve 120 personnes allergiques.
> **Question :** Le nombre d'allergiques dans cet échantillon est-il anormal ?

Solution :
La proportion de personnes allergiques dans la population est de $p = 0,26$.
L'échantillon est de taille $n = 400$.
Puisque $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$ et $n \geqslant 25$, alors la fréquence de l'échantillon doit appartenir l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité d'au moins $0,95$.
Ici, $p - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,26 - \frac{1}{20} = 0,21$ et $p + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,26 + \frac{1}{20} = 0,31$.
Et la fréquence f de l'échantillon est $f = \frac{120}{400} = 0,3$.

Comme $0,3 \in [0,21 ; 0,31]$, le nombre d'allergiques de l'échantillon **n'est pas anormal**.

I 2 Lien avec la loi binomiale

L'intervalle de fluctuation précédent peut être amélioré à l'aide de la loi binomiale. En effet, si on prélève un échantillon aléatoire de taille n et qu'on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre d'individus de cet échantillon ayant ce caractère, alors il est clair que X suit une loi binomiale de paramètres n la taille de l'échantillon et p la probabilité que l'individu ait le caractère étudié.
On peut alors en déduire le résultat suivant :

Définition : On s'intéresse à un caractère de proportion p dans une population.
On prélève un échantillon de taille n et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre d'individus de cet échantillon ayant ce caractère.
Alors X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
L'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence correspondant à X est l'intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right]$ où :
a est le **plus petit** entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$.
b est le **plus petit** entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

Exemple :

> La proportion de personnes ayant les yeux marron dans la population française est 0,34.
> Déterminer un intervalle de fluctuation de la fréquence f des personnes ayant les yeux marron dans un échantillon de taille 100.

Solution :
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant les yeux marron dans un échantillon de taille

$n = 100$. Alors, en assimilant le choix d'une personne au hasard dans un échantillon à un tirage avec remise, on peut supposer que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,34$.
Les valeurs prises par X sont donc tous les entiers compris entre 0 et 100.
Pour déterminer toutes les probabilités de la forme $P(X = k)$ avec k compris entre 0 et 100, on utilise le tableur :

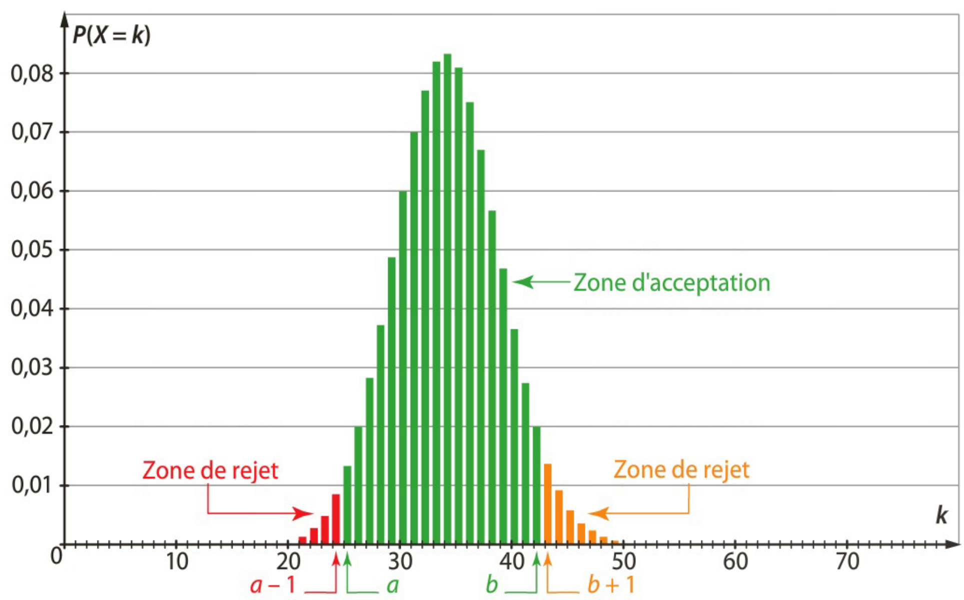
	A k	B pk	C sommeproba	D	E	F	G	H
◆	=seq(n,n,0,100)	=binompdf(100,0.34,a[])						
1	0	9.00313068484E-19	9.00313068484E-19					
2	1	4.6379764134E-17	4.72800772025E-17					
3	2	1.18268398542E-15	1.22996406262E-15					
4	3	1.99025406031E-14	2.11325046657E-14					
5	4	2.48630980716E-13	2.69763485382E-13					
6	5	2.45918642744E-12	2.72894991283E-12					
7	6	2.00585155572E-11	2.278746547E-11					
8	7	1.38759774287E-10	1.61547239757E-10					
9	8	8.30981830108E-10	9.92529069865E-10					
10	9	4.37594472151E-9	5.36847379138E-9					
11	10	2.05138984369E-8	2.58823722283E-8					
12	11	8.64635388663E-8	1.12345911095E-7					
13	12	3.30351854305E-7	4.42697765399E-7					
14	13	1.15199620988E-6	1.59469397528E-6					
15	14	3.6878839706E-6	5.28257794588E-6					
16	15	1.08922956869E-5	1.61748736328E-5					
17	16	2.98094077037E-5	4.59842813365E-5					
18	17	7.58784923368E-5	1.21862773673E-4					
19	18	1.80243354692E-4	3.02106128366E-4					
20	19	4.00732434515E-4	7.02838562881E-4					
21	20	8.36073579284E-4	0.001538912142					

F32

Colonne A : les différentes valeurs prises par X.
Colonne B : le calcul de $P(X = k)$ correspondant.
Colonne C : Les probabilités cumulées croissantes.

Parmi ces valeurs, on cherche donc deux entiers a et b tels que la probabilité que X soit dans l'intervalle $[a; b]$ est au moins égale à 0,95.
a est la première valeur de k pour laquelle la somme des probabilités dépasse 0,025, donc $a = 25$.
b est la première valeur de k pour laquelle la somme des probabilités dépasse 0,975, donc $b = 43$.
Conclusion : la fréquence f appartient à l'intervalle $[0,25; 0,43]$ avec une probabilité au moins égale à 0,95.

On peut également réaliser le diagramme en bâtons correspondant :



II Prise de décision

La détermination d'un intervalle de fluctuation permet de prendre une décision lorsque l'on fait une hypothèse sur une proportion dans une population.
En effet, en faisant une hypothèse sur la proportion p d'un caractère dans une population, on peut déterminer un intervalle de fluctuation I à 95% de la fréquence de ce caractère dans un échantillon de taille n.
Ainsi, on établira une régle de décision : si la fréquence observée dans l'échantillon n'appartient pas à I, comme cela n'a qu'une probabilité de 0,05 de se produire, alors on rejettera l'hypothèse faite sur p, avec un risque de se tromper de 5%.
On en déduit la propriété suivante :

Propriété 2 :
On considère une population dans laquelle on **suppose** que la proportion d'un caractère est p. Après expérience, on **observe** f comme fréquence de ce caractère dans un échantillon de taille n.
Soit l'hypothèse : « La proportion de ce caractère dans la population est p ».
Si I est l'intervalle de fluctuation à 95% de dans un échantillon de taille n, alors :
- Si $f \notin I$: on rejette cette hypothèse au seuil de risque de 5%.
- Sinon, on ne rejette pas cette hypothèse au seuil de risque de 5%.

Exemple :

> Dans un article, un journaliste affirme que 42% des jeunes qui aiment la lecture préfèrent lire le soir.
> On interroge au hasard 140 jeunes qui aiment lire et on assimile le sondage à un tirage successif avec remise : on observe que 49 jeunes déclarent lire le soir.
> Peut-on mettre en doute, au seuil de 5%, l'affirmation du journaliste ?

Solution :
On fait l'hypothèse que la proportion de jeunes aimant lire le soir est $p = 0,42$.
On interroge 140 jeunes au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de jeunes préférant lire le soir. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 140$ et $p = 0,42$.

Dans la table des probabilités cumulées de X, on recherche :
- Le plus petit entier a tel que $p(X \leqslant a) > 0,025$. On trouve $a = 47$.
- Le plus petit entier b tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 0,975$. On trouve $b = 70$.

Comme la taille de l'échantillon est $n = 140$, l'intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence correspondant à X est $\left[\frac{47}{140}; \frac{70}{140}\right]$ soit environ $[0,33; 0,5]$.

La fréquence observée est $f = \frac{49}{140} = 0,35$, donc f **appartient** à l'intervalle $[0,33; 0,5]$.
On ne peut donc pas remettre en question l'hypothèse que la proportion des jeunes lecteurs préférant lire le soir est $p = 0,42$. On ne met donc pas en doute l'affirmation du journaliste.

Autre exemple possible (à donner oralement) :

> On a lancé 100 fois de suite une pièce de monnaie et le côté PILE est apparu 65 fois. Peut-on estimer que la pièce est équilibrée ?

Solution :
Tester si la pièce est équilibrée c'est tester l'hypothèse que la sortie de PILE a une probabilité égale à 0,5.
On observe dans un tableur (=binompdf(100,0.5)) que le plus petit entier tel que $p(X \leqslant a) > 0,025$ est $a = 40$, et le plus petit tel que $p(X \leqslant b) \geqslant 0,975$ est $b = 60$.
Sachant que $n = 100$, l'intervalle de fluctuation cherché est donc $I = [0,4; 0,6]$.
La fréquence d'apparition de piles sur les 100 lancers effectués est de 0,65 qui n'appartient pas à I donc on rejette l'hypothèse que la pièce soit équilibrée avec une probabilité inférieure à 5% de se tromper.