1 Expérience aléatoire-Loi de probabilité sur un ensemble fini

Définition : Expérience aléatoire
Une expérience est dite aléatoire si elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles que l'on peut ni prévoir, ni calculer.
L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé l'univers.
Notation usuelle : On note $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; ....; x_n\}$ l'ensemble des issues possibles.

Exemple 1 : cas du dé
On dispose d'un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on lance ce dé en notant le résultat obtenu.
Quelle est l'ensemble des résultats possibles ?

☛ **Solution**:

Les résultats possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 et 6.

Compléter alors $\Omega = \{....\}$.

☛ **Solution**:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Définition : Loi de probabilités-loi équirépartie
Définir une loi de probabilité sur l'ensemble Ω, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i tel que $0 \leq p_i \leq 1$ et $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.
Si $p_1 = p_2 = p_3 = ... = p_n = \frac{1}{n}$, la loi de probabilité est une loi équirépartie.

Remarque : On peut présenter les probabilités associées aux issues possibles sous forme d'un tableau :

issue	x_1	x_2	....	x_n
probabilité	p_1	p_2	.....	p_n

Exemple 2 : loi de probabilité
Quelle loi de probabilité peut-on définir correspondant à la situation de l'exemple 1 ?

☛ **Solution**:

Le dé est équilibré donc chaque face a autant de chances de sortir que les autres.

issue	1	2	3	4	5	6
probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

2 Modélisation d'une expérience aléatoire-Loi des grands nombres

Modélisation : Choisir une loi de probabilité sur l'ensemble Ω revient à définir les nombres p_i qui représentent le mieux les chances de réalisation de chacune des issues x_i.

Définition : Loi des grands nombres
Si on répète n fois une expérience aléatoire d'univers $\Omega = \{x_1; x_2; x_3; ....; x_n\}$,la fréquence d'apparition de chaque issue x_i se rapproche de la loi de probabilité quand n devient très grand

Exemple 3 : cas du dé
Lancer le dé 10 fois de suite et compléter le tableau suivant :

résultat	1	2	3	4	5	6
nombre d'apparitions	2	3	1	2	1	3
fréquence (total de la ligne=1)	$\frac{2}{10} = 0,2$	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3

En effectuant une simulation de 10000 lancers, on obtient :

résultat	1	2	3	4	5	6
nombre d'apparitions	165	167	168	163	169	168
fréquence arrondie aux dixièmes	$\frac{165}{1000} = 0,165 \simeq 0,16$	0,167	0,168	0,163	0,169	0,168

Avec les 10000 lancers la fréquence d'apparition de chacune des faces se rapproche de la valeur $\frac{1}{6} \simeq 0,17$.

Plus le nombre de lancers est grand, plus les fréquences se rapprochent de $\frac{1}{6}$.

On peut définir la loi de probabilité suivante :

résultat x_i	1	2	3	4	5	6
probabilité p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3 Evénements-probabilité d'un événement

Définition : événement

Un événement est un sous ensemble (une partie) de l'ensemble Ω des issues possibles d'une expérience aléatoire
Un événement élémentaire est un sous-ensemble de Ω constitué d'une seule issue.

Définition : probabilité d'un événement

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le réalise.
Par exemple, si A est l'événement $A = \{x_1; x_2; x_3\}$ alors $p(A) = p_1 + p_2 + p_3$.

Propriété : cas d'une loi équirépartie

Dans le cas d'une loi équirépartie, la probabilité d'un événement A est
$p(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Exemple 4 : avec le dé (voir exemple1)
Soit A l'événement « Obtenir un résultat pair ».
Quel est l'ensemble A ?

☛ **Solution**:

$A = \{2; 4; 6\}$

Quel est la probabilité de A ?

☛ **Solution**:

$p(A) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{3}{6}$

De même, B est l'événement « Obtenir un résultat inférieur ou égal à 3 ».
Quel est l'ensemble B ?

☛ **Solution**:

$B = \{1; 2; 3\}$

Quel est la probabilité de B ?

☛ **Solution**:

$p(B) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{3}{6}$

4 Vocabulaire des événements

Définitions
Ω est l'événement certain.
$\oslash$ est l'événement impossible.
$\overline{A}$ est l'événement contraire de A et est composé de toutes les issues de Ω qui ne sont pas contenue dans A

Propriétés
$p(\oslash) = 0$
$p(\Omega) = 1$
$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Exemple 5
Avec l'exemple du dé :

1. citer un événement impossible.

   Solution:

   L'événement : « obtenir 7 »

2. Décrire l'événement $\overline{A}$ puis donner $p(\overline{A})$.
   rappel : A est l'événement « Obtenir un résultat pair ».

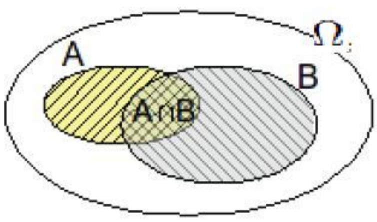
   Solution:

   $\overline{A}$ est l'événement contraire de A
   donc $\overline{A}$: « obtenir un résultat impair »
   ou bien $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$
   $p(\overline{A}) = p(1) + p(3) + p(5) = \frac{3}{6}$
   ou bien
   $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$

5 Intersection-réunion

Définition : intersection-réunion
Soient A et B deux événements.
L'événement $A \cap B$ (lire A inter B) est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A et B.
Lorsqu'aucune issue ne réalise A et B, c'est à dire $A \cap B = \oslash$, on dit que A et B sont incompatibles.
L'événement $A \cup B$ (lire A union B) est l'ensemble des issues qui réalisent A ou bien B, c'est à dire réalisant A ou bien réalisant B ou bien réalisant A et B.

Propriété : probabilité de $A \cup B$
Soients A et B deux événements.
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ (voir schéma ci-dessous)
Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \oslash$), on a alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (car $p(A \cap B) = 0$)



Exemple 6 : avec le dé
Rappel : $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2; 3\}$

1. Décrire l'événement $A \cap B$ puis calculer la probabilité $p(A \cap B)$.

☛ **Solution**:

$A \cap B$: « Obtenir un résultat pair **et** inférieur ou égal à 3 »
soit $A \cap B = \{2\}$
$p(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

2. Décrire l'événement $A \cup B$ puis calculer la probabilité $p(A \cup B)$.

☛ **Solution**:

$A \cup B$: « Obtenir un résultat pair **ou** inférieur ou égal à 3 »
soit $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$
$p(A \cup B) = \dfrac{5}{6}$
on peut aussi utiliser :
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{3}{6} + \dfrac{3}{6} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

3. Déterminer un événement C tel que $p(A \cap C) = 0$

☛ **Solution**:

Si C : « obtenir 5 » alors $A \cap C = \emptyset$
et donc $p(A \cap C) = 0$

☛ **Solution**:

rappel : $A = \{2; 4; 6\}$ et $p(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
$C = \{3\}$ et $p(A) = \dfrac{1}{6}$
A et C sont incompatibles car $A \cap C = \emptyset$
donc $p\left(A \cap C\right) = 0$
et $p\left(A \cup C\right) = p(A) + p(C) = \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

Remarque : $A \cup C = \{2; 3; 4; 6\}$ donc $p\left(A \cup C\right) = \dfrac{4}{6}$