VARIABLE ALÉATOIRE ET LOI BINOMIALE

Première S - Chapitre 9

Table des matières

Dans ce chapitre, n et i désignent des entiers naturels.

I Variable aléatoire et loi de probabilité

I 1 Variable aléatoire

Définition

Lorsqu'à chaque issue d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Remarques :
• Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule : X, Y, Z, T, G...
• Lorsque x_1, x_2, ..., x_n sont les valeurs prises par une variable aléatoire X, on note $X = x_i$ l'événement « X prend la valeur x_i » (avec $1 \leqslant i \leqslant n$)

I 2 Loi de probabilité

Définition

Lorsqu'à chaque valeur x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité de l'événement $X = x_i$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité de** X.
On représente généralement cette loi à l'aide d'un tableau :

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Remarque importante :
On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

I 3 Exemple complet

Énoncé :
On lance un dé cubique, non pipé, dont les faces sont numérotées 1, 1, 1, 2, 3 et 4.
Soit X la variable aléatoire donnant le numéro apparu. Déterminer la loi de probabilité de X.

Correction :
Les valeurs prises par X sont 1, 2, 3 et 4.
Le dé étant non pipé, chaque face a la même probabilité d'être obtenue. 3 faces ayant le chiffre 1, on a donc $P(X = 1) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.
De même, $P(X = 2) = \dfrac{1}{6}$, $P(X = 3) = \dfrac{1}{6}$ et $P(X = 4) = \dfrac{1}{6}$.
La loi de probabilité de X est donc :

Valeur x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

II Espérance, variance et écart-type

Dans toute cette partie, on appelle X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n.

II 1 Espérance

II 1 a Définition

Définition

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre **réel** noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$$

avec pour tout entier i compris entre 1 et n, $p_i = P(X = x_i)$.

Remarque :
L'espérance mathématique peut être interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.

Exercice :
Faire l'exercice 42 page 306 du livre (permet d'introduire la remarque suivante).

Remarque importante :
Si X est une variable aléatoire égale à un gain algébrique dans une expérience aléatoire représentant un jeu, alors :
- Si $E(X) > 0$, alors le jeu est dit favorable au joueur (et défavorable à l'organisateur).
- Si $E(X) < 0$, alors le jeu est dit défavorable au joueur (et favorable à l'organisateur).
- Si $E(X) = 0$, alors le jeu est dit équitable.

II 1 b Linéarité de l'espérance

Propriété

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Démonstration :

Si X prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n, alors $aX+b$ prend les valeurs ax_1+b, ax_2+b, ..., ax_n+b et on a :

$\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n$, $X = x_i \Leftrightarrow aX + b = ax_i + b$ d'où $P(aX + b = ax_i + b) = P(X = x_i)$.

Ainsi, en posant $p_i = P(X = x_i)$, on a :

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)P(aX+b = ax_i+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i = \sum_{i=1}^{n} ax_ip_i+\sum_{i=1}^{n} bp_i = a\sum_{i=1}^{n} p_ix_i+b\sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Or $\sum\limits_{i=1}^{n} p_ix_i = E(X)$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Donc $E(aX + b) = aE(X) + b$.

II 2 Variance et écart-type

II 2 a Définitions

Définition

La variance de la loi de probabilité de X est le nombre réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$$

Définition

L'écart-type de la loi de probabilité de X est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

II 2 b Deux propriétés de la variance

Propriété 1 : Formule de König-Huyghens - admise

Soit X une variable aléatoire. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Propriété 2

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Démonstration :

$V(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i + b - E(aX + b))^2$

$V(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i + b - (aE(X) + b))^2$

$V(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} p_i(ax_i - aE(X))^2$

$V(aX + b) = \sum_{i=1}^{n} p_i a^2(x_i - E(X))^2$

$V(aX + b) = a^2 \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$

$V(aX + b) = a^2 V(X)$

III Loi binomiale

III 1 Problématique et présentation

On lance vingt fois de suite, dans les mêmes conditions, un dé bien équilibré à 6 faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 20 fois la face 6 sur les 20 lancers ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 fois la face 6 sur les 20 lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois la face 6 sur les 20 lancers ?

Correction :

1. *Faire une idée de l'arbre pondéré complet, bien préciser que toutes les expériences sont identiques et indépendantes (même probabilité).*
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'apparait la face 6 sur les 20 lancers.
   Un seul chemin donne 20 fois la face 6 : celui du haut. Donc $P(X=20)=\left(\frac{1}{6}\right)^{20}$.
2. Un seul chemin donne 0 fois la face 6 : celui du bas. Donc $P(X=0)=\left(\frac{5}{6}\right)^{20}$.
3. On ne peut pas déterminer (pour le moment !) $P(X=4)$ car il y a un nombre indéterminé de chemins dans l'arbre donnant exactement 4 fois la face 6.
   Par exemple : $EEEE\overline{E}...\overline{E}$, $EEE\overline{E}E\overline{E}...\overline{E}$, $E\overline{E}...\overline{E}EEE$ etc
   En revanche, on peut déterminer la probabilité de chacun de ces chemins, car ces chemins contiennent autant de branches qui vont vers le haut (4 branches car 4 succès) que de branches qui vont vers le bas (16 branches car 16 succès) : cette probabilité vaut $\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{16}$.
   Ainsi, $P(X=4)=(\text{Nombre de chemins qui donnent exactement 4 fois la face 6})\times\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{16}$.
   Ce nombre de chemins, qui correspond au nombre de **combinaisons** possibles de 4 succès parmi 20 épreuves, est appelé un **coefficient binomial**. Il se détermine (en classe de 1ère !) à l'aide de la calculatrice, sauf quelques cas particuliers. On le note $\binom{20}{4}$.
   La calculatrice donne $\binom{20}{4}=4845$.
   Ainsi, $P(X=4)=\binom{20}{4}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{16}=4845\times\left(\frac{1}{6}\right)^{4}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{16}\approx 0,2022$.

   Remarques :
   - Dans la pratique, les coefficients binomiaux se déterminent à la calculatrice. Pour les petites valeurs de n, ces nombres peuvent être déterminés directement à partir d'un arbre.
   - Dans la pratique (toujours !), il n'est plus nécessaire de réaliser un arbre pour déterminer les différentes probabilités $P(X=k)$ pour k allant de 0 à n. En effet, on peut reproduire la formule obtenue pour $X=4$ pour toute autre valeur de X comprise entre 0 et 20 ; déterminer ainsi $P(X=7)$
   $P(X=7)=(\text{Nombre de chemins qui donnent exactement 7 fois la face 6})\times\left(\frac{1}{6}\right)^{7}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{13}$.
   $P(X=7)=\binom{20}{7}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{7}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{13}\approx 0,0259$.

III 2 Épreuve de Bernoulli

Définition

Lorsque, dans une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement S (appelé « succès ») ou à sa non-réalisation $\overline{S}$ (appelé « échec »), on dit que cette expérience est une **épreuve de Bernoulli**.
Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. On dit alors que X suit une **loi de Bernoulli**.

Exemple :
Un jeu de dé est tel que le joueur gagne lorsque le 6 sort et perd dans le cas contraire.
Soit S l'événement « le 6 sort » ; alors si le dé n'est pas pipé, $P(S) = \dfrac{1}{6}$ et $P(\overline{S}) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.
La variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le 6 sort et la valeur 0 dans les cinq autres cas suit une loi de Bernoulli :

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

III 3 Schéma de Bernoulli

Définition

Lorsque l'on effectue plusieurs épreuves de Bernoulli successives, identiques et indépendantes les unes des autres, on dit qu'il s'agit d'un **schéma de Bernoulli**.

Exemple :
L'expérience consistant à effectuer 20 fois de suite l'épreuve de Bernoulli de l'exemple précédent est un schéma de Bernoulli.

III 4 Loi binomiale de paramètres n et p

Définition

On considère un schéma de Bernoulli constitué par la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Pour chacune d'elles, on note p la probabilité d'obtenir un succès S.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus parmi les n épreuves. Alors on dit que la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres n et p. On le note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n\,;p)$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
Alors pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration :

L'événement $X = k$ est associé à l'ensemble des chemins dans l'arbre pour lesquels il y a exactement k succès et donc $n-k$ échecs. Chacun de ces chemins a une probabilité égale au produit des probabilités inscrites sur les branches qui constituent ce chemin, c'est-à-dire $p^k(1-p)^{n-k}$. Or il y a $\binom{n}{k}$ chemins de ce type.
D'où $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Exemple :

Une société spécialisée dans l'audience des médias estime que 19,8% des Français vont regarder le premier match de la France pour l'Euro 2016 de Football. Enzo contacte 20 de ses amis et on estime que le nombre d'amis d'Enzo est assez grand pour assimiler ce tirage à un tirage avec remise de 20 amis. Soit X la variable aléatoire qui donne parmi ces 20 personnes, le nombre de celles qui vont regarder le premier match de l'Euro 2016. (On donnera des valeurs approchées à 10^{-6} près)

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'une personne contactée sur deux va regarder le match.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 2 personnes sur les 20 vont regarder le match.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité qu'entre 5 et 15 personnes vont regarder le match.
5. Écrire un algorithme, en langage naturel, qui renvoie la plus petite valeur de k telle que la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant k)$ soit supérieure à $0,99$.

III 5 Espérance et variance de la loi binomiale

Propriété (admise)

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$, alors :

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad Var(X) = np(1-p)$$

III 6 Propriétés des coefficients binomiaux

Propriété 1

Soient n un entier naturel et k un entier naturel compris entre 0 et k. Alors :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration :

$\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant 0 succès : celui ne comportant que des échecs.
$\binom{n}{n} = 1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant n succès : celui ne comportant que des succès.
$\binom{n}{1} = n$ car il y a n chemins réalisant 1 succès. En effet, les n-uplets réalisant un seul succès ne diffèrent que par la place qu'occupe l'unique succès dans la liste des issues. Il y a n choix possibles pour placer le succès parmi les n épreuves.
$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ car lorsqu'il y a $n-k$ succès, il y a k échecs. Compter le nombre de chemins menant à $n-k$ succès revient donc à compter le nombre de chemins menant à k échecs. Dénombrer les façons de placer k échecs parmi n épreuves revient alors à calculer $\binom{n}{k}$.

Propriété 2 : Formule de Pascal

Soient n un entier naturel et k un entier naturel compris entre 0 et n. Alors :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration :

Les chemins comportant $k+1$ succès parmi $n+1$ épreuves de Bernoulli sont de deux types :
- ceux pour lesquels la dernière épreuve (la $(n+1)$ième) donne un succès.
- ceux pour lesquels la dernière épreuve donne un échec.
- Si la $(n+1)$ième épreuve donne un succès, alors pour avoir un total de $k+1$ succès, il faut que les n épreuves précédentes aient donné k succès. Il y a donc $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles.
- Si la $(n+1)$ième épreuve donne un échec, alors pour avoir un total de $k+1$ succès, il faut que les n épreuves précédentes aient donné $k+1$ succès. Il y a donc $\binom{n}{k+1}$ combinaisons possibles.

Les ensembles de ces deux types de chemins étant disjoints, on en déduit donc que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Faire un schéma des deux cas de figure, avec des cases, et la dernière case qui est S ou $\overline{S}$.

Remarque :
On retrouve les coefficients binomiaux et la formule de Pascal dans un tableau dit « triangle de Pascal » :

n / k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

On retrouve aussi les coefficients binomiaux dans le développement de $(a+b)^n$:
$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = a+b$
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

On peut alors conjecturer le développement de $(a+b)^n$ pour tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k}$$