

OBJECTIF : Rechercher l'expression explicite d'une suite définie par récurrence à deux niveaux.

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$, $u_0 = -6$ et $u_1 = -1$.

PARTIE A

L'algorithme ci-dessous permet de calculer la valeur de u_N pour un entier naturel $N \geq 2$:

| |
|---|
| <p>Variables : N, J, deux entiers naturels A, B et C trois nombres réels</p> <p>Début</p> <p style="padding-left: 40px;">Lire N</p> <p style="padding-left: 40px;">A prend la valeur -6</p> <p style="padding-left: 40px;">B prend la valeur -1</p> <p style="padding-left: 40px;">Pour J allant de 2 à N</p> <p style="padding-left: 80px;">C prend la valeur $5B - 4A$</p> <p style="padding-left: 80px;">A prend la valeur B</p> <p style="padding-left: 80px;">B prend la valeur C</p> <p style="padding-left: 40px;">FinPour</p> <p style="padding-left: 40px;">Afficher B</p> <p>Fin</p> |
|---|

1. Programmer cet algorithme sur une calculatrice.
2. Exécuter ce programme afin de compléter le tableau ci-dessous :

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| N | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| u_N | | | | | | | |

3. Vérifier le tableau précédent en réalisant un tableur sur la calculatrice calculant les premiers termes de la suite u .

PARTIE B

On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1. Modifier l'algorithme précédent pour qu'il affiche la valeur de v_N pour un entier naturel $N \geq 1$ donné.
2. Programmer cet algorithme sur une calculatrice.
3. Exécuter ce programme afin de compléter le tableau ci-dessous :

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| N | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| v_N | | | | | | | |

4. Vérifier le tableau précédent en complétant sur la calculatrice le tableur de la **Partie A** par une colonne calculant les premiers termes de la suite (v_n) .
5. Quelle conjecture peut-on émettre sur la nature de la suite (v_n) ?

PARTIE C

Soit (S_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = u_0 + \sum_{k=0}^n v_k$.

1. Modifier l'algorithme de la **Partie B** pour qu'il affiche la valeur de S_N pour un entier naturel N donné.
2. Programmer cet algorithme sur une calculatrice.
3. Exécuter ce programme afin de compléter le tableau ci-dessous :

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|
| N | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| S_N | | | | | | |

4. Vérifier le tableau précédent en complétant sur la calculatrice le tableur de la **Partie A** par une nouvelle colonne calculant les premiers termes de la suite (S_n) .
5. Quelle conjecture peut-on émettre sur la suite (S_n) ?

PARTIE D

1. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 4.
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n , puis de S_n en fonction de n .
3. En écrivant : $v_0 = u_1 - u_0$

$$v_1 = u_2 - u_1$$

$$v_2 = u_3 - u_2$$

.....

$$v_{n-1} = u_n - u_{n-1}$$

$$v_n = u_{n+1} - u_n$$

et en additionnant les termes à gauche de l'égalité et à droite de l'égalité, démontrer la conjecture émise à la question 4. de la **Partie C**.

4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n .