SUITES

Première S - Chapitre 8

Table des matières

I Généralités sur les suites

I 1 Notion de suite

Feuille d'activité à distribuer. Exercices 1 et 2.

Remarque : dans tout le chapitre, on définira les suites par défaut sur l'ensemble $\mathbb{N}$. Tous les résultats (sauf précision contraire) restent valables si la suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang.

Définition

On appelle suite u de nombre réels toute fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
L'image par u d'un entier naturel n est un réel noté u_n, et se lit « u indice n ».
On dit que u_n est le terme général de la suite u.

Notation et remarque :
- La suite u est aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n), à ne pas confondre avec le terme général u_n : u_n est un réel, (u_n) est une suite. (*Faire l'analogie avec f et $f(x)$.*)
- Dans un repère, la représentation graphique de la suite u est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n\,;u_n)$ avec $n \in \mathbb{N}$.

I 2 Modes de génération d'une suite

Une suite peut être définie de plusieurs façons différentes :

I 2 a au moyen d'une fonction f de variable n : $u_n = f(n)$

Exemple :
Soit u la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = n^2 + 2n + 3$.
Alors pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$ avec $f : x \mapsto x^2 + 2x + 3$. On a ainsi $u_0 = f(0) = 3$ etc...

Vocabulaire :
Lorsque l'on connaît le terme général u_n d'une suite u en fonction de n, on dit que l'on a sa **forme explicite**.

Avantages de ce mode de génération :
- Lorsqu'une suite est définie de **manière explicite**, on peut calculer directement n'importe quel terme de la suite, sans avoir à connaître les termes précédents.
- Son étude est proche de celle d'une fonction.

Problème :
La plupart des suites rencontrées dans les exercices et dans des situations concrètes (économie, évolution...) ne sont pas générées par une formule explicite mais...

I 2 b au moyen d'une relation de récurrence

La suite u est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou de plusieurs termes précédents. La relation peut être donnée par une formule explicite ou par un algorithme.

Exemple :
Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
On obtient alors $u_1 = 3u_0 + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$, $u_2 = ...$ etc.

Remarque :
La suite ci-dessus peut se réaliser à l'aide d'un tableur (cf. TI Nspire) ou d'un algorithme (boucle *While* ou boucle *For*) :

Tableur :

	A	B
1	0	1
2	=A1+1	=3*B1+1
3	=A2+1	=3*B2+1
4	... *recopier vers le bas* ...	... *recopier vers le bas* ...

Programme :

```
Define suite01()=
Prgm
Local n,u,i
Request "rang désiré = ", n
u :=1
For i,1,n
   u :=3*u+1
EndFor
Disp "u(",n,")=",u
EndPrgm
```

Problème de ce mode de génération :
Pour calculer un terme, il faut connaître le précédent, et par suite (ahah), il faut donc connaître tous les termes précédents.
Par exemple dans l'exemple précédent, pour calculer u_{17}, il faut effectuer le calcul : $u_{17} = 3u_{16} + 1$, et il faut donc calculer $u_{16} = 3u_{15} + 1$, etc etc...

L'un des buts principaux de ce chapitre va être de concevoir des méthodes permettant de passer d'une forme récurrente (peu pratique dans les calculs mais très répandue) à sa forme explicite (pratique pour les calculs et l'étude de la suite).

I 2 c par un autre moyen...

Il peut exister des suites dont les termes ne suivent pas une logique particulière : par exemple la suite des décimales de π, ou une suite de nombres générés aléatoirement.

II Sens de variations d'une suite

II 1 Définition

Définition

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.
On dit que la suite u est strictement croissante lorsque pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1}$.
On dit que la suite u est strictement décroissante lorsque pour tout entier naturel n, $u_n > u_{n+1}$.

Remarque :
On définit de même une suite croissante ou décroissante en utilisant une inégalité large ($\leqslant$ ou $\geqslant$).

II 2 Comment étudier le sens de variation d'une suite

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$. Pour étudier le sens de variation de la suite u, on peut procéder à plusieurs méthodes :

II 2 a $1^{\text{ère}}$ méthode : étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Propriété (évidente)

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.
Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite u est croissante.
Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite u est décroissante.

Remarque hyper hyper hyper hyper importante :
Il faut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ **pour tout entier naturel** n (c'est-à-dire sans chercher à remplacer n par un entier au choix !!).
Ce n'est pas parce que $u_1 - u_0 > 0$ et que $u_2 - u_1 > 0$ (etc) que l'on peut conclure que cela va rester vrai pour tous les entiers naturels n et que u est croissante !

II 2 b 2^{e} méthode : étude du sens de variation d'une fonction

Propriété

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ définie de manière explicite sous la forme $u_n = f(n)$, avec f une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$.
Si la fonction f est croissante sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite u est croissante.
Si la fonction f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, alors la suite u est décroissante.

Démonstration :

Pour tout entier naturel n, $n < n+1$. Or f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc $f(n) \leqslant f(n+1)$, soit $u_n \leqslant u_{n+1}$, donc u est croissante.
(Même démo pour u décroissante)

Exemple :

Déterminer le sens de variations de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

II 2 c 3^e^ méthode : comparaison de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Propriété

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$ à **termes strictement positifs**.
Si pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite u est strictement croissante.
Si pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite u est strictement décroissante.
Si pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors la suite u est constante.

Démonstration :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$ car $u_n > 0$.

Exemple :

Déterminer le sens de variations de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5}{2^n}$.

III Suites arithmétiques

III 1 Définition

Définition

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.
On dit que u est une suite arithmétique de raison r si et seulement si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple :

Soit u la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 0$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2$. Calculer les premiers termes.

III 2 Formule explicite

Propriété

Soit u une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}$.
Alors pour tous entiers naturels n et p, on a :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

En particulier, si u est définie à partir du rang 0, on a :

$$u_n = u_0 + nr$$

Démonstration :

Démonstration dans le cas où $n > p$:
Faire un schéma...

Exemple :

Soit u la suite arithmétique de raison $r = 3$ définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_{10} = 2$. Calculer u_{17}.

III 3 Méthode pour montrer qu'une suite est arithmétique

Méthode Pour montrer qu'une suite u est arithmétique, on calcule, **pour tout entier naturel** n, la différence $u_{n+1} - u_n$ et on montre que cette différence est égal à un réel constant.
La suite u est alors arithmétique de raison ce réel.

Remarque hyper hyper hyper importante :
Ce n'est pas parce que l'on montre que $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$ que l'on peut conclure que cela marche pour **tout entier naturel** n et que la suite est arithmétique ! Il faut effectuer le calcul **avec la variable** n.

Exemple :

Montrer que la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3 - 5n$ est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.

III 4 Méthode pour montrer qu'une suite n'est pas arithmétique

Méthode Pour montrer qu'une suite u n'est pas arithmétique, on utilise un **contre-exemple** :
Par exemple, on calcule les trois premiers termes de la suite (ou trois termes consécutifs quelconques), et on montre que leur différence n'est pas constante.

Exemple :

Montrer que la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ n'est pas arithmétique.

III 5 Sens de variation d'une suite arithmétique

Propriété

Soit u une suite arithmétique de raison r définie sur $\mathbb{N}$.
Si $r > 0$, alors la suite u est strictement croissante.
Si $r < 0$, alors la suite u est strictement décroissante.
Si $r = 0$, alors la suite u est constante.

Démonstration :

Si u est arithmétique de raison r, alors $u_{n+1} = u_n + r$, d'où $r = u_{n+1} - u_n$.
Or on a vu que le signe de $u_{n+1} - u_n$ donnait les variations de u, d'où le résultat.

III 6 Somme des entiers de 1 à n

Propriété

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration :

Soit $S=1+2+...+n$. On a :
$S=1+2+...+(n-1)+n$ que l'on peut écrire en inversant l'ordre des termes :
$S=n+(n-1)+...+2+1$.
Par somme de ces deux égalités terme à terme, on obtient :
$2S=(1+n)+(2+n-1)+...+(n-1+2)+(n+1)$
donc $2S=(n+1)+(n+1)+...+(n+1)$
donc $2S=n(n+1)$
donc $2S=\dfrac{n(n+1)}{2}$

Exemples :

Calculer les sommes suivantes :
- $S_1=1+2+3+...+100$ $(=5050)$
- $S_2=13+14+...+25$ $(=247)$
- $u_0=4$ et $u_{n+1}=u_n+3$, $S_3=u_0+u_1+...+u_{10}$ $(=209)$

IV Suites géométriques

IV 1 Définition

Définition

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$.
On dit que u est une suite géométrique de raison q si et seulement si il existe un réel q non nul tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1}=q\times u_n$$

Exemple :

Soit u la suite géométrique de raison 5 définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_0=2$.
Alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=5u_n$. Calculer les premiers termes.

IV 2 Formule explicite

Propriété

Soit u une suite géométrique de raison q définie sur $\mathbb{N}$.
Alors pour tous entiers naturels n et p, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, si u est définie à partir du rang 0, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration :

Démonstration dans le cas où $n > p$:
Faire un schéma...

Exemple :

Soit u la suite géométrique de raison $r = \dfrac{1}{2}$ définie sur $\mathbb{N}$ et telle que $u_6 = 5$. Calculer u_{11}.

IV 3 Méthode pour montrer qu'une suite est géométrique

Méthode

Pour montrer qu'une suite u est géométrique, on exprime, **pour tout entier naturel** n, u_{n+1} en fonction de u_n en montrant qu'il existe un réel q tel que $u_{n+1} = q \times u_n$.
La suite u est alors géométrique de raison ce réel.

Remarques hyper hyper hyper importantes :
- C'est la **seule** et **unique** méthode valable et correcte ! On ne peut pas essayer de montrer que le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant car son étude implique de démontrer au préalable que u_n ne s'annule pas (long et contraignant).
- Ce n'est pas parce que l'on montre que $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{u_2}{u_1}$ que l'on peut conclure que cela marche pour **tout entier naturel** n et que la suite est géométrique !

Exemple :

Montrer que la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2^n}{3}$ est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

IV 4 Méthode pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique

Méthode

Pour montrer qu'une suite u n'est pas géométrique, on utilise un **contre-exemple** :
Par exemple, on calcule les trois premiers termes de la suite (ou trois termes consécutifs quelconques), et on montre que leur quotient n'est pas constant.

Exemple :

Montrer que la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 4n^2 - 1$ n'est pas géométrique.

IV 5 Sens de variation d'une suite géométrique de raison strictement positive

Théorème (admis)

Soit u une suite définie sur $\mathbb{N}$, géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0.
Si $u_0 > 0$ **:**
Si $q > 1$, alors u est strictement croissante.
Si $q = 1$, alors u est constante.
Si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.
Si $u_0 < 0$ **:**
Si $q > 1$, alors u est strictement décroissante.
Si $q = 1$, alors u est constante.
Si $0 < q < 1$, alors u est strictement croissante.
Si $u_0 = 0$, alors la suite u est constante à zéro.

IV 6 Somme des puissances successives d'un réel

Propriété

Soit q un réel différent de 1. Alors pour tout entier naturel n, on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Démonstration :

Soit $S = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n$. Alors $qS = q + q^2 + q^3 + ... + q^n + q^{n+1}$
Donc par différence de ces deux égalités, on obtient :
$S - Sq = 1 - q^{n+1}$, donc $(1 - q)S = 1 - q^{n+1}$.
Et comme $q \neq 1$, on a bien $S = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Remarque :
Si $q = 1$, alors $1 + q + q^2 + ... + q^n = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = (n + 1) \times 1 = n + 1$

Exemple :

Calculer pour tout entier naturel n la somme $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n$. $\left(= \dfrac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1\right)$

V Variations et représentations graphiques

V 1 Suite arithmétique

Variation absolue :
Soit u une suite arithmétique de raison r, définie sur $\mathbb{N}$.
Alors pour tout entier naturel n, on a vu que $u_{n+1} = u_n + r$, soit $u_{n+1} - u_n = r$.
On dit que la **variation absolue** de la suite u est **constante** (et égale à r).

Évolution linéaire :
Soit u une suite géométrique.
Tous les points de la représentation graphique de la suite u sont alignés.
On dit que **l'évolution de la suite u est linéaire**.

V 2 Suite géométrique

Variation relative :
Soit u une suite géométrique de raison q à termes tous non nuls.
Alors $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = \dfrac{qu_n - u_n}{u_n} = \dfrac{u_n(q-1)}{u_n} = q - 1$.
On remarque que ce rapport est constant.
On dit que le rapport $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ est appelée la **variation relative** de la suite u.

Évolution exponentielle :
Soit u une suite géométrique.
Tous les points de la représentation graphique de la suite u sont sur une courbe représentant une fonction ayant une « vitesse de (dé)croissance » élevée.
On dit que u suit une **évolution exponentielle**.