Activité 1 : Suite et notation indicielle

L'étude d'une population met en évidence une augmentation de 1 % par an à partir de 2013 où elle comptait 100 000 individus. On se propose d'étudier son évolution chaque année.

1. Quelle sera la population en 2014 ? Et en 2015 ?
2. On note P_0 la population en 2013, P_1 la population en 2014, P_2 la population en 2015, etc. Comment s'écrit, avec cette notation, la population en 2020 ?
3. Que représente P_{25} ?

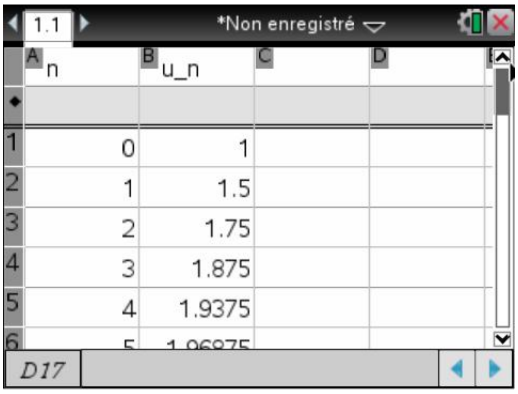
On dit que les nombres P_0, P_1, P_2, ... constituent une **suite**.
Une suite de nombres réels est une **liste ordonnée** de nombres. Elle peut être finie ou infinie.
Une lettre étant choisie, on note les termes de la suite par cette lettre affectée d'un **indice**. Par exemple : P_0, P_1, P_2, ..., P_n. C'est la **notation indicielle**.

Activité 2 : Suite et tableur

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par son premier terme $u_0 = 1$ et par la **relation de récurrence** suivante, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$

1. Calculer à la main les 4 premiers termes de la suite.
2. Peut-on calculer directement u_{12} ? Pourquoi ?

On souhaite automatiser le calcul des termes de la suite u à l'aide d'un tableur. Pour cela, on a réalisé le tableur suivant :



	A n	B u_n	C	D
◆				
1	0	1		
2	1	1.5		
3	2	1.75		
4	3	1.875		
5	4	1.9375		

3. Quelle formule a-t-on entré dans la cellule **A2** puis recopié vers le bas pour obtenir directement les entiers de la colonne **A** ? Que représente cette colonne ?
4. Que représente le nombre contenu dans la cellule **B1** ?
5. Quelle formule a-t-on entré dans la cellule **B2** puis recopié vers le bas pour obtenir directement tous les termes de la suite u dans la colonne **B** ?
6. Réaliser ce tableur sur la calculatrice et déterminer alors u_{12}.

Activité 3 : Suite et algorithme

On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables : n, u, i
Début :
  Saisir n
  u :=2
  Pour i allant de 1 à n
    $u := \dfrac{2u+3}{u}$
  Fin Pour
  Afficher "u(",n,") = ",u
Fin

1. Programmer cet algorithme sur la calculatrice et remplir le tableau suivant :

n	0	1	2	3	7	100
u_n						

2. Donner la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
3. En déduire, sans utiliser le programme, la valeur de u_4.

Activité 4 : Deux suites particulières

Partie A : une suite arithmétique

A sa naissance, les parents de Mathieu mettent pour lui, dans une tirelire, 100 euros. Depuis, à chacun de ses anniversaires, ils y rajoutent 50 euros. Mathieu ne pourra ouvrir sa tirelire avant sa majorité.
On appelle u_n la somme d'argent dans sa tirelire à son $n^{\text{ième}}$ anniversaire. Ainsi, $u_0 = 100$

1. Quelle somme contiendra la tirelire de Mathieu à son premier anniversaire ? A son deuxième ? A son troisième ? (Utiliser la notation indicielle pour donner les réponses)
2. Donner la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
3. Conjecturer une formule permettant de calculer directement u_n en fonction de n.
4. Combien d'argent contiendra sa tirelire à sa majorité ?

Si il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, on ait la relation de récurrence

$$\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$$

Alors on dit que u est une suite **arithmétique de raison r**.
On a alors la formule **explicite** de u_n, pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{u_n = u_0 + n \times r}$.
(Dans cet exercice, u est une suite arithmétique de raison 50 et de premier terme $u_0 = 100$.)

Partie B : une suite géométrique

Pour la naissance de Manon, ses parents ouvrent un compte en banque au taux fixe annuel de 5 %. Ils y placent 500 euros et n'y toucheront plus jusqu'à la majorité de Manon.
On appelle v_n la somme d'argent en banque à son $n^{\text{ième}}$ anniversaire. Ainsi, $v_0 = 500$.

1. Combien aura Manon sur son compte à son premier anniversaire ? A son deuxième ? A son troisième ? (Utiliser la notation indicielle pour donner les réponses)
2. Donner la relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n.
3. Conjecturer une formule permettant de calculer directement v_n en fonction de n.
4. Quelle somme Manon aura-t-elle sur son compte à ses dix-huit ans ?

Si il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, on ait la relation de récurrence

$$\boldsymbol{v_{n+1} = q \times v_n}$$

Alors on dit que v est une suite **géométrique de raison q**.
On a alors la formule **explicite** de v_n, pour tout entier naturel n : $\boldsymbol{v_n = q^n \times v_0}$.
(Dans cet exercice, v est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme $v_0 = 500$.)