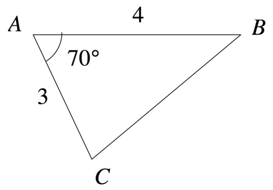
PRODUIT SCALAIRE

Première S - Chapitre 7

Table des matières

I Expressions du produit scalaire

I 1 Exercice de motivation



Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 70\,^\circ$. Calculer BC.
Problème : on ne peut pas utiliser le théorème de Pythagore car le triangle n'est pas rectangle. On verra, à la fin de ce chapitre, que le produit scalaire offre une solution à ce problème en généralisant le théorème de Pythagore à tout triangle.

I 2 Norme d'un vecteur

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, et A et B deux points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $||\vec{u}||$, est la longueur du segment $[AB]$. On a : $||\vec{u}|| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

Remarque :
Dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;y)$, alors $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Propriétés (admises)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
- Pour tout réel k, on a : $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$. On a notamment $||-\vec{u}|| = ||\vec{u}||$.
- $||\vec{u} + \vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (inégalité triangulaire)
- $||\vec{u}|| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{0}$.

I 3 Produit scalaire de deux vecteurs : une première expression

I 3 a Activité d'approche

Faire l'activité 1 page 215 du livre.

I 3 b Définition

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, le nombre **réel** noté $\vec{u}.\vec{v}$ (« $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ») et défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

Conséquences immédiates :

1. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
2. $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$. On le note parfois $\vec{u}^2$ mais c'est moche et ambigu...
3. Si $\vec{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\vec{v} = \overrightarrow{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$. **Attention, la réciproque est fausse !**

Remarque (limite programme)

On a aussi :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2\right)$$

I 4 Une deuxième expression : avec les normes et un angle

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Démonstration :

La démonstration a été faite dans l'activité 1 page 215 du livre en début de chapitre.

I 5 Une troisième expression : pour des vecteurs colinéaires

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors on appelle produit scalaire et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le **réel positif** $||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire, alors on appelle produit scalaire et on note $\vec{u}.\vec{v}$ le **réel négatif** $-||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.
(Faire une figure)

Démonstration :

La démonstration se fait à partir de la deuxième expression du produit scalaire :

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $(\vec{u}\,, \vec{v}) = 0$, donc $\cos(\vec{u}\,, \vec{v}) = 1$.
Ainsi $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times 1 = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et sens contraire, alors $(\vec{u}\,, \vec{v}) = \pi$, donc $\cos(\vec{u}\,, \vec{v}) = -1$.
Ainsi $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times (-1) = -||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$.

I 6 Une quatrième expression : l'expression analytique

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan muni d'un repère **orthonormé** $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$.
Si $\vec{u}(x\,; y)$ et $\vec{v}(x'\,; y')$, alors

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Démonstration :

$||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2$ et $||\vec{v}||^2 = x'^2 + y'^2$.
$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' \,; y + y')$, donc $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2$.
Ainsi, $\vec{u}.\vec{v} = \dfrac{1}{2}\left((x + x')^2 + (y + y')^2 - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2\right) = ... = xx' + yy'$.

Remarque :
Attention, l'expression analytique n'est valable **que** dans un repère **orthonormé** !

I 7 Une cinquième expression : à l'aide du projeté orthogonal

Définition

Soit M un point du plan et d une droite du plan. On appelle projeté orthogonal du point M sur la droite d le point M' tel que les droites (MM') et d soient perpendiculaires.
En particulier, si $M \in d$, alors son projeté orthogonal sur d est lui-même.
(Faire une figure)

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On note A, B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$, où C' est le projeté orthogonal de C sur (AB).

Démonstration :

La démonstration sera faite dans le II.
Remarques :
1) On a aussi $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{AC}$, où B' est le projeté orthogonal de B sur (AC).
2) Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan, et C' et D' les projetés orthogonaux respectifs de C et D sur la droite (AB). Alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$.
On dit que $\overrightarrow{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{CD}$ sur (AB).

II Propriétés du produit scalaire

II 1 Produit scalaire et orthogonalité

II 1 a Vecteurs orthogonaux

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan, et soient A, B, C et D quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si et seulement si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

II 1 b Lien avec le produit scalaire

Théorème fondamental

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$$

Remarque :
Le vecteur nul est considéré comme orthogonal à tout vecteur du plan.

Démonstration :

Posons A, B et C trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = 0 \Leftrightarrow ||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$.
Or $||\vec{u}||^2 = BA^2$, $||\vec{v}||^2 = AC^2$ et $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = ||\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}||^2 = ||\overrightarrow{BC}||^2 = BC^2$.
Ainsi, $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow ABC$ est rectangle en A.
Conclusion : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$.

Conséquence du théorème :
Le plan est muni d'un repère orthonormé. Les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$.

II 2 Produit scalaire et opérations

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et tout nombre réel k, on a :

1. $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
2. $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
3. $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}.(k\vec{v})$

Démonstration :

Les démonstrations se font rapidement à l'aide de la forme analytique.

Identités remarquables

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
2. $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
3. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration :

Les démonstrations se font rapidement à l'aide de la propriété précédente. (Le faire)

II 3 Démonstration de la cinquième expression (projeté orthogonal)

Démonstration :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'C}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'C}$.
Or les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{C'C}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'C} = 0$.
Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$.

III Applications du produit scalaire en géométrie analytique

III 1 Équation d'une droite

III 1 a Définition d'un vecteur normal à une droite

Définition

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Un vecteur normal à la droite d est un vecteur non nul orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

Propriété

Soit d une droite passant par un point A du plan et de vecteur normal $\vec{n}$.
Alors la droite d est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

III 1 b Équation d'une droite de vecteur normal

Théorème

Soit a et b deux nombres réels non nuls tous les deux (c'est-à-dire tels que $(a, b) \neq (0, 0)$.
La droite d admet le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ pour vecteur normal si et seulement si elle admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec c un réel.

Démonstration :

Soit $A(x_A\,;y_A)$ un point de d et $\vec{n}$ un vecteur normal de d de coordonnées $(a\,;b)$.
Alors $M(x\,;y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A) \times a + (y - y_A) \times b = 0 \Leftrightarrow ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_A + by_A$.

III 2 Équation d'un cercle

Propriété

Soit C le cercle de centre $A(x_A\,;y_A)$ et de rayon R.
Une équation cartésienne de C est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

Démonstration :

$M(x\,;y) \in C \Leftrightarrow AM = R \Leftrightarrow AM^2 = R^2 \Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$.

Propriété

Le cercle C de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration :

Dire que M appartient au cercle C signifie que M est confondu avec A ou B, ou que $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

IV Applications du produit scalaire pour le calcul de longueurs et de mesures d'angles

IV 1 Théorème de la médiane

Propriété

Soient A et B deux points du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Démonstration :

$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.
$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$.
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

IV 2 Relations métriques dans un triangle

IV 2 a Théorème d'Al-Kashi

Théorème

Soit ABC un triangle quelconque. Alors on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \times AC \times BC \times \cos\widehat{ACB}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos\widehat{ABC}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\widehat{CAB}$$

Démonstration :

$AB^2 = (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})^2 = (-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2 = AC^2+BC^2-2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = AC^2+BC^2-2\times AC\times BC\times\cos\widehat{ACB}$.

IV 2 b Formules des aires

Théorème

Soit ABC un triangle quelconque. On note S l'aire du triangle ABC. Alors on a :

$$S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\widehat{CAB} = \frac{1}{2}AC \times BC \times \sin\widehat{ACB} = \frac{1}{2}AB \times BC \times \sin\widehat{ABC}$$

Démonstration :

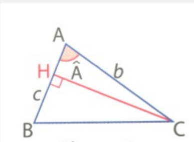


Figure 1

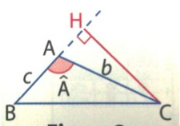


Figure 2

Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors $S = \frac{1}{2}AB \times CH$.
Si l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, alors A et H sont confondus et $\sin(\widehat{BAC}) = 1$, d'où le résultat.
Si l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu (figure 1), alors $CH = AC\sin\widehat{BAC}$.
Si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus (figure 2), alors $CH = AC\sin(\pi - \widehat{BAC}) = AC\sin(\widehat{BAC})$.
Donc dans les deux cas, $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\widehat{BAC})$.

IV 2 c Formules des sinus

Propriété

Soit ABC un triangle. Alors on a :

$$\frac{AB}{\sin\widehat{ACB}} = \frac{AC}{\sin\widehat{ABC}} = \frac{BC}{\sin\widehat{BAC}}$$

Démonstration :

On part de la formule des aires et on multiplie chaque membre par $\dfrac{2}{AB \times AC \times BC}$.

Remarque :
Ces formules sont très utiles en physique et en astronomie car elles permettent de calculer la distance entre deux corps lointains. (cf. exercices)

V Applications du produit scalaire en trigonométrie

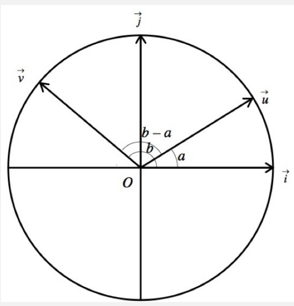
V 1 Formules d'addition

Propriété

Pour tous réels x et y, on a :

1. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
2. $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
3. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
4. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos y$.

Démonstration de 2. :



Dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires tels que $(\vec{i},\vec{u}) = a$ et $(\vec{i},\vec{v}) = b$.
Une première expression du produit scalaire est donc :
$\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 1 \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\vec{u},\vec{v})$.
De plus, d'après la relation de Chasles, on a aussi $(\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{i}) + (\vec{i},\vec{v}) = b - a$.
Donc $\vec{u}.\vec{v} = \cos(b-a) = \cos(a-b)$.
D'autre part, dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}$ a pour coordonnées $(\cos a\,;\sin a)$ et $\vec{v}$ a pour coordonnées $(\cos b\,;\sin b)$.
Ainsi, à l'aide de l'expression analytique, on a $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
Conclusion : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Démonstration de 1. :

On remplace b par $-b$ dans l'égalité précédente.

Démonstration de 3. :

$\sin(a-b) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - (a-b)\right) = \cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\cos b - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right)\sin b$.
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$.

Démonstration de 4. :

On remplace b par $-b$ dans l'égalité précédente.

V 2 Formules de duplication

Propriété

Pour tout réel x

1. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
2. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

Démonstration :

1. $\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
   Or $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
2. $\sin 2x = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x = 2\sin x \cos x$.

A partir des formules de duplication, on en déduit directement les formules de linéarisation :

V 3 Formules de linéarisation

Propriété

Pour tout réel x, on a :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$