TRIGONOMÉTRIE ET ANGLES ORIENTÉS

Première S - Chapitre 5

Table des matières

I Le cercle trigonométrique et le radian **2**

I 1 Le cercle trigonométrique . . . 2

I 2 Définition d'un angle orienté . . . 3

I 3 Mesure en radian d'un angle orienté . . . 3

II Propriétés des angles orientés **4**

II 1 Vecteurs colinéaires et angles orientés . . . 4

II 2 Relation de Chasles . . . 4

II 3 Conséquences de la relation de Chasles . . . 4

II 4 Mesure principale d'un angle . . . 5

III Cosinus et sinus d'un réel **5**

III 1 Cosinus, sinus et cercle trigonométrique . . . 5

III 2 Propriétés . . . 6

III 3 Valeurs particulières à connaître . . . 6

III 4 Formules de correspondances . . . 6

IV Résolution d'équations trigonométriques **7**

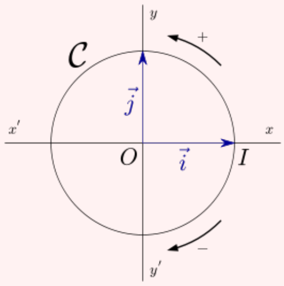
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

I Le cercle trigonométrique et le radian

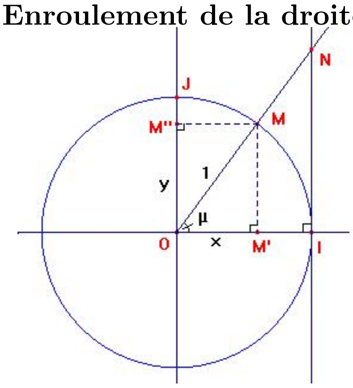
I 1 Le cercle trigonométrique

Définition

On appelle **cercle trigonométrique** le cercle C de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit un sens de parcours, appelé le **sens direct**.



Enroulement de la droite des réels :



Soit d la tangente à C au point $I(1\,;0)$.
Alors tout point N de d est repéré par un unique réel x.
(d peut être assimilé à un axe gradué)
En enroulant la droite d sur le cercle C, on associe à tout réel x un unique point $M(x)$ du cercle C et on dit que x est une mesure de l'angle $\widehat{IOM}$.

Remarque :
La longueur d'un cercle de rayon R est donnée par la formule $2\pi R$.
Or le cercle trigonométrique a pour rayon $R = 1$, donc sa longueur est de 2π.
Son demi-cercle a donc pour longueur π et son quart de cercle a pour longueur $\frac{\pi}{2}$.

Exemple :

Tracer un cercle trigonométrique et placer les points $I(0)$, $J(\frac{\pi}{2})$, $K(\pi)$, $L(\frac{3\pi}{2})$, $M(2\pi)$, $N(-\frac{\pi}{2})$, $P(-\frac{3\pi}{4})$.

Propriété

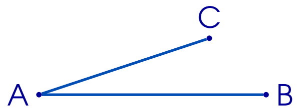
Pour tout réel x et pour tout entier relatif k, les points $M(x)$ et $M'(x + k \times 2\pi)$ du cercle trigonométrique sont confondus.

Exemple :

Dans l'exemple précédent, I et M sont confondus, et N et L sont confondus.

I 2 Définition d'un angle orienté

Soient 3 points distincts A, B et C du plan.



On peut définir l'angle géométrique $\widehat{ABC}$.
Mais cet angle peut aussi être défini par les demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ ou par les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On définit ainsi **l'angle orienté** de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AC}$ et on le note $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
On peut alors aussi définir l'angle orienté de $\overrightarrow{AC}$ vers $\overrightarrow{AB}$ noté $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$.
Remarque : on a ainsi $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

I 3 Mesure en radian d'un angle orienté

Définition

Soit C un cercle trigonométrique de centre O dans un repère orthonormé **direct** $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.
Pour tous points M et N de C, on appelle mesure, **en radians**, de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ la famille de nombres sous la forme $x + k \times 2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, où x est la longueur de l'arc $\widehat{MN}$.
Faire une figure.

Exemple :

Faire un cercle trigo et placer un point $M(x)$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$.
L'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ de mesure α degrés intercepte l'arc $\widehat{IM}$ de longueur x.
On dit alors que l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ mesure x radians.

Remarques :
Un angle plat mesure π radians.
Un angle droit mesure $\dfrac{\pi}{2}$ radians.
Un angle nul mesure 0 radian.

Propriété (admise)

Les mesures en degré et en radian d'un angle sont proportionnelles.

Exemple :

degré	0	180	90	60	45	30
radian	0	π	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$

II Propriétés des angles orientés

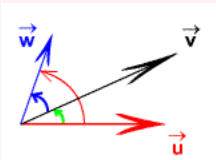
II 1 Vecteurs colinéaires et angles orientés

Propriété

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens $\Leftrightarrow$ $(\vec{u},\vec{v}) = 0 + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire $\Leftrightarrow$ $(\vec{u},\vec{v}) = \pi + k \times 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $(\vec{u},\vec{v}) = 0 + k \times \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

II 2 Relation de Chasles

Propriété



Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls du plan, on a :

$$(\vec{u},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w})$$

II 3 Conséquences de la relation de Chasles

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls :
1) $(\vec{u},\vec{v}) = -(\vec{v},\vec{u})$. 2) $(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$. 3) $(-\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$. 4) $(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$.
Faire une figure en-dessous de chaque propriété.

Démonstration :

1) $(\vec{u},\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u},\vec{v}) = -(\vec{v},\vec{u})$.
2) $(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},-\vec{v})$. Or $\vec{v}$ et $-\vec{v}$ sont opposés, donc colinéaires de sens contraire, donc $(\vec{v},-\vec{v}) = \pi$. Donc $(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi$.
3) $(-\vec{u},\vec{v}) = (-\vec{u},\vec{u}) + (\vec{u},\vec{v}) = \pi + (\vec{u},\vec{v})$.
4) $(-\vec{u},-\vec{v}) = (-\vec{u},\vec{u}) + (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},-\vec{v}) = \pi + (\vec{u},\vec{v}) + \pi = (\vec{u},\vec{v}) + 2\pi$. C'est-à-dire $(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v})$.

Remarque importante :
$(\vec{u},-\vec{u})$ a pour mesure π radian, mais aussi $-\pi$ radian.
Les formules 2) et 3) peuvent donc s'écrire :
2) $(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) - \pi$. et 3) $(-\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) - \pi$.
En pratique, il pourra être utile de faire apparaitre un nombre identique de fois $+\pi$ et $-\pi$ pour procéder à une simplification immédiate.
Par exemple, la démonstration de la propriété 4) peut ainsi s'écrire :
$(-\vec{u},-\vec{v}) = (-\vec{u},\vec{u}) + (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},-\vec{v}) = \pi + (\vec{u},\vec{v}) - \pi = (\vec{u},\vec{v})$.

II 4 Mesure principale d'un angle

Un angle possède en radian une infinité de mesures. En effet, si x est une mesure d'angle en radian, alors $x+2\pi$, $x-4\pi$, ..., $x+k\times 2\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) en sont d'autres.

Définition

La mesure principale d'un angle est son unique mesure en radian appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Exemples :

Déterminer les mesures principales de $\alpha=-\dfrac{19\pi}{3}$ et $\beta=\dfrac{59\pi}{8}$.

1ère méthode : par intuition, ou en testant plusieurs fois.
$-\dfrac{19\pi}{3}+6\pi=\dfrac{-19\pi}{3}+\dfrac{18\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}\in]-\pi\,;\pi]$. Donc $-\dfrac{\pi}{3}$ est la mesure principale de α.
2ème méthode : en décomposant la mesure pour faire apparaitre le « bon » multiple de 2π.
$\alpha=-\dfrac{19\pi}{3}=\dfrac{-18\pi-\pi}{3}=--6\pi-\dfrac{\pi}{3}=-3\times 2\pi-\dfrac{\pi}{3}$. Or $-\dfrac{\pi}{3}\in]-\pi\,;\pi]$ donc $-\dfrac{\pi}{3}$ est la mesure principale de α.
3ème méthode : plus « lourde » en calculs mais fonctionne à tous les coups sans chercher.
On cherche $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\alpha+k\times 2\pi\in]-\pi\,;\pi]$, c'est-à-dire : $-\pi<-\dfrac{19\pi}{3}+k\times 2\pi\leqslant\pi$
$\Leftrightarrow -1<-\dfrac{19}{3}+2k\leqslant 1\Leftrightarrow -1+\dfrac{19}{3}<2k\leqslant 1+\dfrac{19}{3}\Leftrightarrow\dfrac{16}{3}<2k\leqslant\dfrac{22}{3}\Leftrightarrow\dfrac{8}{3}<k\leqslant\dfrac{11}{3}$.
Or $\dfrac{8}{3}\approx 2,67$ et $\dfrac{11}{3}\approx 3,67$ et $k\in\mathbb{Z}$.
Donc $k=3$. Il faut donc ajouter $3\times 2\pi$ à α. Ainsi, $-\dfrac{19\pi}{3}+3\times 2\pi=-\dfrac{\pi}{3}\in]-\pi\,;\pi]$.
Donc $-\dfrac{\pi}{3}$ est la mesure principale de α.

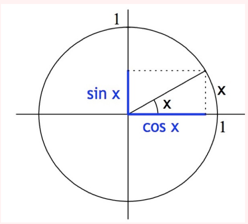
Exemples :

Faire les trois méthodes pour β. On obtient $-\dfrac{5\pi}{8}$.

III Cosinus et sinus d'un réel

III 1 Cosinus, sinus et cercle trigonométrique

Propriété



Soit C le cercle trigonométrique de centre O dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Soit x un réel et M le point de C tel que $(\vec{i},\overrightarrow{OM})=x$ radians.
Le point M a alors pour coordonnées : $M(\cos x\,;\sin x)$
Autrement dit : $\overrightarrow{OM}=\cos x\times\vec{i}+\sin x\times\vec{j}$.

Démonstration :

Trigonométrie dans un triangle rectangle.

III 2 Propriétés

Propriété

Pour tout réel x, on a :
$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$; $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Démonstration :

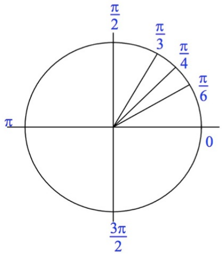
Faire une démonstration rapide et à l'aide du triangle rectangle.

Propriété (admise)

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$.

III 3 Valeurs particulières à connaître

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sin x	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	1	0	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

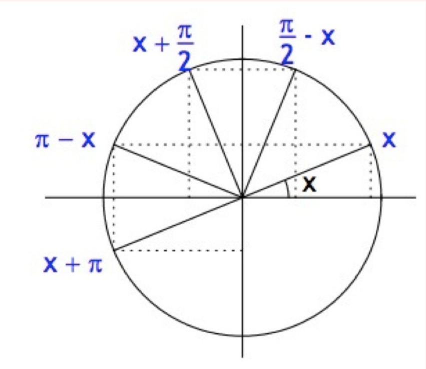


III 4 Formules de correspondances

Propriété (admise)

Pour tout réel x :

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi + x) = -\cos x$; $\cos(\pi + x) = -\sin x$

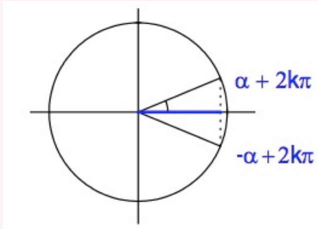


IV Résolution d'équations trigonométriques

Propriété (admise)

Soit α un réel.

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + k' \times 2\pi,\ k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Soit α un réel.

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + k' \times 2\pi,\ k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$