ÉTUDE DE FONCTIONS

Première S - Chapitre 3

Table des matières

I Fonction de référence : $x \mapsto \sqrt{x}$

I 1 Étude de la fonction

Propriété

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est appelée la fonction **racine carrée**. Elle est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ et est strictement croissante sur cet intervalle.

Tableau de variations :

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	$0 \nearrow +\infty$

Courbe représentative :

Démonstration :

Soient deux réels a et b tels que $\boxed{0 \leqslant a < b}$

Comparons $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ en étudiant le signe de leur différence :

$$\sqrt{b}-\sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}^2-\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$$

Or $a < b$ donc $b-a > 0$.

De plus, $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{b} > 0$ donc $\sqrt{b}+\sqrt{a} > 0$.

Ainsi, le quotient $\dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$ est positif, donc $\sqrt{b}-\sqrt{a} > 0$, donc $\boxed{\sqrt{a} < \sqrt{b}}$

Ainsi, la fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

I 2 Positions relatives de courbes usuelles

Propriété

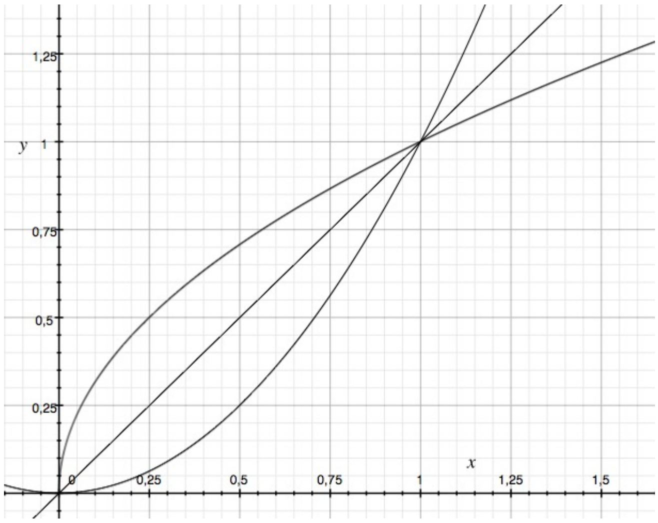
On note C_1, C_2 et C_3 les courbes d'équations respectives $y = x$, $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.

- Les points de coordonnées $(0\,;0)$ et $(1\,;1)$ sont communs à ces trois courbes.
- Sur $]0\,;1[$, C_2 est en dessous de C_1, elle-même en dessous de C_3.
- Sur $]1\,;+\infty[$, C_3 est en dessous de C_1, elle-même en dessous de C_2.

Autrement dit, pour tout réel x :

- Si $0 < x < 1$, alors $x^2 < x < \sqrt{x}$.
- Si $x > 1$, alors $\sqrt{x} < x < x^2$.

Graphiquement :



Démonstration :

On vérifie rapidement que $0 = 0^2 = \sqrt{0}$ et $1 = 1^2 = \sqrt{1}$.

1$^{\text{er}}$ cas : $0 < x < 1$

$0 < x < 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 < x$ (multiplication par $x > 0$)

$\Leftrightarrow 0 < \sqrt{x^2} < \sqrt{x}$ (car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$)

$\Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{x}$ (car si $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$)

Conclusion : Si $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

2$^{\text{e}}$ cas : $x > 1$

$x > 1 \Leftrightarrow x^2 > x$ (multiplication par $x > 0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{x}$ (car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$)

$\Leftrightarrow x > \sqrt{x}$

Conclusion : Si $x > 1$, alors $x^2 > x > \sqrt{x}$.

II Fonction de référence $x \mapsto |x|$

II 1 Valeur absolue d'un réel

Définition

La valeur absolue d'un réel x est le réel, noté $|x|$, défini par :

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ si } x \leqslant 0 \\ x \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Autrement dit, la valeur absolue d'un réel positif est le nombre lui-même, et la valeur absolue d'un réel négatif est l'opposé de ce nombre.

Exemples :

$|3,4| = 3,4$ $\quad |-1| = 1$ $\quad |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5}-2$ $\quad |\pi - 3| = \pi - 3$ ...

Propriété

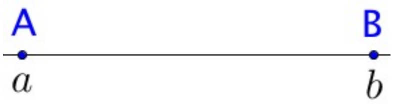
Pour tout réel x, on a :
$|x| \geqslant 0$ $\qquad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $\qquad |-x| = |x|$ $\qquad \sqrt{x^2} = |x|$

Démonstration :

- Les trois premières sont des conséquences directes de la définition.
- Pour tout réel x :

$\sqrt{x^2}$ est le nombre positif dont le carré est x^2.
Or $|x|^2 = x^2$ et $|x| \geqslant 0$. Donc $|x|$ est aussi un nombre positif dont le carré est x^2.
Donc $\sqrt{x^2} = |x|$.

II 2 Résolution d'équations et d'inéquations



Soit (Ox) une droite graduée.
Soient A et B deux points sur cet axe d'abscisses respectives a et b.
Alors

$$AB = |b - a|$$

II 2 a Résolution d'équations

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x-3| = 2$.

Méthode graphique :
Soit M le point d'abscisse x et A le point d'abscisse 3 sur une droite graduée. Alors $AM = |x-3|$.
Donc $|x-3| = 2 \Leftrightarrow AM = 2$.
Graphiquement, on obtient $x = 1$ ou $x = 5$.
Les solutions de l'équation $|x-3| = 2$ sont donc 1 et 5.

Méthode algébrique :
$|x-3| = 2 \Leftrightarrow x - 3 = 2$ ou $x - 3 = -2$
$\qquad\qquad \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 1$.

► De même, résoudre les équations suivantes :
$|4x-1| = 2 \qquad |5+3x| = 2 \qquad |4-x| = 0 \qquad |x| = 4 \qquad |4x-3| = |2-7x|$

II 2 b Résolution d'inéquations

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x-3| \leqslant 2$.

Méthode graphique :
Soit M le point d'abscisse x et A le point d'abscisse 3 sur une droite graduée. Alors $AM = |x-3|$.
Donc $|x-3| \leqslant 2 \Leftrightarrow AM \leqslant 2$.
Graphiquement, on obtient $x \in [1\,;5]$.

Méthode algébrique :
$|x-3| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x - 3 \leqslant 2$ ou $1 \leqslant x \leqslant 5$

► De même, résoudre les inéquations suivantes :
$|5+x| \leqslant 1$ $|5-3x| < 7$ $|4+x| \geqslant 2$ $|6+x| < -4$ $|4x-3| > -1$

II 3 Étude de la fonction

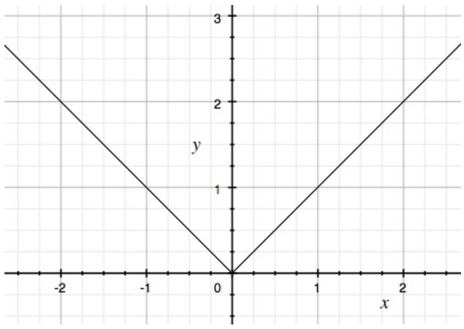
Propriété

La fonction $x \mapsto |x|$ est appelée la fonction **valeur absolue**. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Courbe représentative :



Démonstration :

$\forall x \leqslant 0$, $|x| = -x$ et la fonction affine $x \mapsto -x$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$.
$\forall x \geqslant 0$, $|x| = x$ et la fonction affine $x \mapsto x$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty]$.

Remarque :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$ donc la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

III Fonctions associées

Voir poly élèves (Corinne).