GÉOMÉTRIE PLANE

Chapitre 2

Table des matières

I Colinéarité de deux vecteurs

I 1 Définition

Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{v} = k \times \vec{u}$.
Autrement dit, dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, leurs coordonnées sont proportionnelles.

Remarque :
Comme $0 \times \vec{u} = \vec{0}$, par analogie, on dit que le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

I 2 Propriété

Propriété

Soient $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs du plan, avec x, x', y et y' quatre réels.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

Démonstration :

- Dans le cas où l'un des deux vecteurs est nul, alors le résultat est immédiat. (car par exemple, $x = y = 0$ et ainsi $xy' - x'y = 0$).

- Supposons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls. On a alors :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$
$\Leftrightarrow$ leurs coordonnées sont proportionnelles :

abscisse	x	x'
ordonnée	y	y'

$\Leftrightarrow xy' = x'y$
$\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$.

Exemple :

Soient $\vec{u}(2\,;1)$, $\vec{v}(4\,;-2)$ et $\vec{w}\left(\dfrac{3}{2}\,;\dfrac{3}{4}\right)$.
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, mais que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ le sont.

II Expression d'un vecteur en fonction de 2 vecteurs non colinéaires

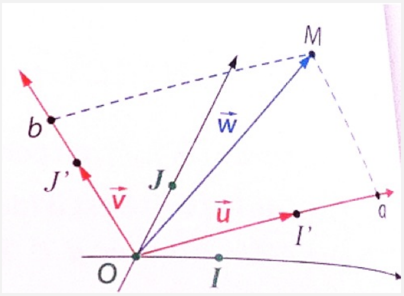
Théorème

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan.
Alors pour tout vecteur $\vec{w}$ du plan, il existe un couple unique de réels $(a\,;b)$ tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

Le couple $(a\,;b)$ est appelé couple des coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}\,;\vec{v})$.
(*faire un schéma*)

Démonstration :



• **Existence :**
Dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, soient les points I', J' et M tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OI'}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OJ'}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OM}$.
Les points O, I' et J' ne sont pas alignés, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Ainsi, $(O\,;I'\,;J')$ est un repère du plan.
Notons $(a\,;b)$ les coordonnées de M dans ce repère.
On a alors : $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{OI'} + b\overrightarrow{OJ'}$, c'est-à-dire : $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

• **Unicité :**
On suppose qu'il existe deux couples $(a\,;b)$ et $(a'\,;b')$ tels que :
$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} = a'\vec{u} + b'\vec{v}$.
Alors $(a-a')\vec{u} = (b'-b)\vec{v}$.
Si $a - a' \neq 0$, on obtient : $\vec{u} = \dfrac{b'-b}{a-a'}\vec{v}$. C'est impossible, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
On a donc $a - a' = 0$, d'où $a = a'$.
Le même raisonnement conduit à l'égalité $b = b'$.
Ainsi, on aboutit à des couples de coordonnées $(a\,;b)$ et $(a\,;b)$ identiques.

Exemple :
Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{AD}$.
(Réponse : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AD}$)

III Équations cartésiennes d'une droite

III 1 Vecteurs directeurs d'une droite

Définition

On appelle vecteur directeur $\vec{u}$ d'une droite d tout vecteur non nul colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$, où A et B sont deux points distincts de la droite d. On dit alors que $\vec{u}$ dirige la droite d.

Exemple :

Faire une figure...

Remarque :
On peut alors définir une droite d par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u}$: M appartient à d si et seulement $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

III 2 Équations cartésiennes d'une droite

III 2 a Théorème

Théorème

Soit d une droite du plan dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Alors $M(x\,;y) \in d$ si et seulement si il existe trois réels a, b et c, avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ tels que $ax + by + c = 0$.
Une telle équation s'appelle une équation cartésienne de la droite d.

Démonstration :

Soit d une droite passant par un point $A(x_A\,;y_A)$ et de vecteur directeur (non nul) $\vec{u}(\alpha\,;\beta)$.
Pour tout point $M(x\,;y)$ du plan, on a :

$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

$\Leftrightarrow \beta \times (x - x_A) - \alpha \times (y - y_A) = 0$

$\Leftrightarrow \beta x - \alpha y + (-\beta x_A + \alpha y_A) = 0$ et $(\beta\,;-\alpha) \neq (0\,;0)$, car $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Remarque :
Une droite d admet une infinité d'équations cartésiennes, dont les coefficients sont deux à deux proportionnelles.

Exemple :

Si la droite d a pour équation cartésienne $2x + 3y - 5 = 0$, alors $-4x - 6y + 10 = 0$ est aussi une équation cartésienne de d.

III 2 b Propriétés

Propriétés immédiates (admises)

Soient a, b, c, a', b' et c' des réels avec$(a\,;b) \neq (0\,;0)$ et $(a'\,;b') \neq (0\,;0)$.
• L'ensemble des points $M(x\,y)$ vérifiant $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$.
• Les droites d et d' d'équations respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si $(a\,;b)$ et $(a'\,;b')$ sont proportionnels.

Exemple :

La droite d d'équation $3x+4y-10=0$ admet comme vecteur directeur $\vec{u}(-4\,;3)$.

Contre-exemples :

Les droites $d : 2x-y+3=0$ et $d' : -4x+2y+1=0$ sont parallèles car les couples $(2\,;-1)$ et $(-4\,;2)$ sont proportionnels.
Les droites d et $d'' : 2x+3y+2=0$ ne sont pas parallèles car les couples $(2\,;-1)$ et $(2\,;3)$ ne sont pas proportionnels.

III 3 Lien entre équation réduite et équations cartésiennes d'une droite

Propriété

Soit d une droite d'équation $ax+by+c=0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
• Si $b=0$, alors d est une droite parallèle à l'axe des ordonnées, qui admet une équation réduite de la forme $x=k$, avec k un réel.
• Si $b \neq 0$, alors d est une droite qui admet une unique équation réduite de la forme $y=mx+p$, où m et p sont des réels. m est le coefficient directeur de la droite d et p son ordonnée à l'origine.
Le vecteur de coordonnées $(1\,;m)$ est alors un vecteur directeur de d.

Démonstration :

Soit d une droite d'équation $ax+by+c=0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

• Si $b=0$:
comme $(a\,;b) \neq (0\,;0)$, alors $a \neq 0$.
L'équation $ax+by+c=0$ est équivalente à $ax+c=0$, c'est-à-dire $x=-\dfrac{c}{a}$.
On sait que le vecteur de coordonnées $(-b\,;a)$, donc ici $(0\,;a)$, est un vecteur directeur de d.
Le vecteur de coordonnées $(0\,;1))$ est colinéaire à ce vecteur et est non nul : donc il dirige la droite d.

• Si $b \neq 0$:
L'équation $ax+by+c=0$ est équivalente à $y=-\dfrac{a}{b}x+\left(\dfrac{-c}{b}\right)$.
Le coefficient directeur m de la droite d est : $m=-\dfrac{a}{b}$.
On sait que le vecteur de coordonnées $(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de la droite d.
Le vecteur de coordonnées $\left(1\,;-\dfrac{a}{b}\right)$, c'est-à-dire $(1\,;m)$ est colinéaire à ce vecteur et non nul : donc il dirige d.