SECOND DEGRÉ

Première S - Chapitre 1

Table des matières

I Fonctions polynômes du second degré

I 1 Forme développée (ou réduite)

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On dit que f est une fonction **polynôme du second degré**, ou fonction trinôme du second degré, si et seulement si il existe des réels a, b et c, avec $a \neq 0$, tels que pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Cette forme est appelée la forme **développée** (ou réduite) de $f(x)$.

Remarque :
La forme développée d'une fonction polynôme du second degré est unique.

Vocabulaire :
• f est une fonction et $f(x)$ est un réel (c'est l'image de x par la fonction f). Ainsi, les phrases « $f(x)$ est une fonction du second degré » ou « $f = ax^2 + bx + c$ » sont **fausses**.
• Si a, b et c sont des réels, avec $a \neq 0$, alors $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une **fonction polynôme** du second degré et $f(x) = ax^2 + bx + c$ est un **polynôme** du second degré.

Exemples :
• $f : x \mapsto -3x^2 + 5x - 1$.
• $g : x \mapsto 2(5 - x)(4x + 3)$. (Attention, ce n'est pas la forme développée de g ici)
• $h : x \mapsto 5x^2 + 2$.

Contre-exemples :

• $f : x \mapsto 2x + 1$ (Fonction polynôme du premier degré)

• $g : x \mapsto 3x^3$ (Fonction polynôme du troisième degré)

• $h : x \mapsto 5x^2 + \dfrac{1}{x}$ (Fonction rationnelle)

I 2 Égalité de deux trinômes

Propriété

Soit P et Q deux polynômes du second degré définis sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$, avec a, b, c, a', b' et c' des réels tels que $a \neq 0$ et $a' \neq 0$.

Alors pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$ si et seulement si $\begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$.

Démonstration :

« si et seulement si » traduit une équivalence, c'est-à-dire une propriété qui est vraie « dans les deux sens ». Il faut donc démontrer les deux sens de l'équivalence.

• Si $a = a'$, $b = b'$ et $c = c'$, alors pour tout réel x, on a bien $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c$.

• Si pour tout réel x, $P(x) = Q(x)$, alors cette égalité est en particulier vraie pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = -1$, ce qui nous donne le système suivant que l'on résout :

$$\begin{cases} c &= c' \\ a+b+c &= a'+b'+c' \\ a-b+c &= a'-b'+c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= c' \\ a+b &= a'+b' \\ a-b &= a'-b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= c' \\ a+b &= a'+b' \\ 2a &= 2a' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= c' \\ b &= b' \\ a &= a' \end{cases}$$

Remarque :
Ce résultat se généralise pour les polynômes de degré quelconque.

I 3 Forme canonique

Ex 1 : Déterminer la forme canonique de $3x^2 + 6x + 1 = 0$.
Ex 2 : Déterminer la forme canonique de $-4x^2 + 5x - 2 = 0$.

Généralisons le procédé pour tout polynôme du second degré :

Démonstration :

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Pour tout réel x, on a :
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$f(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)$ (car $a \neq 0$)
$f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{c}{a}\right]$
$f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$
$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$
(On vérifie facilement par le calcul que $f(\alpha) = \beta$)

Propriété & Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$. Alors pour tout réel x :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

Cette écriture est appelée la **forme canonique** de f.

Exemples :

Déterminer la forme canonique des fonctions $f : x \mapsto 3x^2 - 6x + 1$ et $g : x \mapsto -2x^2 + 5x + 3$.

I 4 Variations et courbe représentative

Propriété

Soit f une fonction polynôme du second degré dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec a, α et β des réels et $a \neq 0$. Alors son tableau de variation est :

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\searrow$	β	$\nearrow$

Si $a < 0$

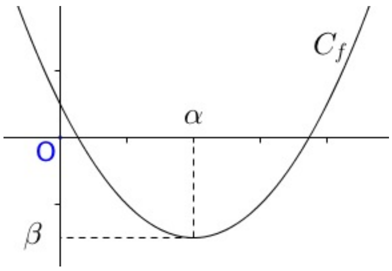
x	$-\infty$	α	$+\infty$
f	$\nearrow$	β	$\searrow$

Démonstration :

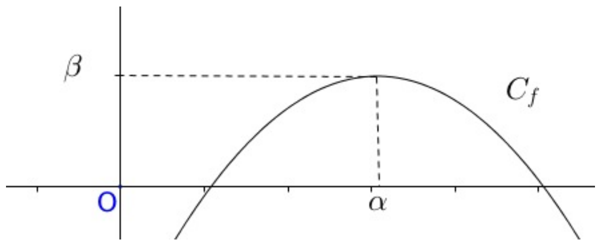
La démonstration a été vue en classe de Seconde. (*Rappeler l'idée ou donner la démo en exercice*)

Représentation graphique :
Dans un repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une **parabole** de sommet le point $S(\alpha\,;\,\beta)$, et qui admet pour axe de symétrique la droite d'équation $x = \alpha$.

Si $a > 0$



Si $a < 0$



II Équations du second degré

II 1 Définition

Définition

On appelle **équation du second degré** toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c des réels tels que $a \neq 0$.

II 2 Premiers exemples

On sait déjà résoudre certaines équations du second degré : toutes celles n'ayant que deux termes par exemple.

Ex 1 : $x^2 = 3$ ($b = 0$)
Ex 2 : $4x^2 - 2x = 0$ ($c = 0$)
Ex 3 : $-5x^2 = 0$ ($b = 0$ et $c = 0$)
Ex 4 : $(3x+2)^2 = 0$ (carré nul)
Ex 5 : $x^2 + 5 = 0$ (pas de solution)
Ex 6 : $((4-5x)^2 + 3 = 0$ (idem, pas besoin de développer !)
Ex 7 : $x^2 - 2x + 1 = 0$ (identité remarquable)

Ex 8 : $-2x^2 + x + 1 = 0$
Ici, le membre de droite est nul et le membre de gauche est constitué de trois termes, sans facteur commun ni reconnaissance d'une identité remarquable. Comment résoudre cette équation ? En utilisant (pour le moment !) la forme canonique :

$$-2x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

En passant par la forme canonique, on a réussi à factoriser le membre de gauche pour résoudre l'équation. Généralisons ce procédé :

Démonstration :

D'après la forme canonique vue au **I 3**, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est équivalente à l'équation $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$.
Posons $\Delta = b^2 - 4ac$.
Or $a \neq 0$ donc l'équation se ramène à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$, soit $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{(2a)^2}$.

- Si $\Delta < 0$, alors $\frac{\Delta}{(2a)^2} < 0$ donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation se ramène à $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ d'où $x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors $\frac{\Delta}{(2a)^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ et l'équation se ramène à :

$$\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0.$$

Ainsi, $x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, donc l'équation a deux solutions : $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

II 3 Discriminant et énoncé du théorème

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Le réel $b^2 - 4ac$, noté Δ, est appelé le **discriminant de** f.

Théorème (démontré au-dessus !)

Soit a, b et c des réels, avec $a \neq 0$, et Δ le réel défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.
Soit (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
• Si $\Delta < 0$, alors (E) n'a pas de solution réelle.
• Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une unique solution réelle $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. On dit que cette solution est double.
• Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux solutions réelles : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Remarque :
Les solutions, lorsqu'elles existent, sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ et de l'axe des abscisses.

Vocabulaire :
Les **solutions** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont aussi appelées les **racines** du polynôme $ax^2 + bx + c$.
ATTENTION À NE PAS CONFONDRE CES DEUX MOTS DE VOCABULAIRE !

II 4 Exemples rédigés

Ex 1 (cas où $\Delta > 0$) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x^2 + x + 1 = 0$
Ex 2 (cas où $\Delta < 0$) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2 - 7x + 5 = 0$
Ex 3 (cas où $\Delta = 0$) : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 - 8x - 16 = 0$

Remarque : Lorsque l'on obtient $\Delta = 0$, cela signifie que l'on est passé à côté d'une identité remarquable (le vérifier avec l'Ex 3).

II 5 Forme factorisée

Propriété

Soit ax^2+bx+c un trinôme du second degré, avec a, b et c des réels tels que $a \neq 0$, et soit $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.
• Si $\Delta > 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
• Si $\Delta = 0$, alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$, où x_0 est la racine double du trinôme.
• Si $\Delta < 0$, alors $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

Démonstration :

• Si $\Delta < 0$: admis.
• Si $\Delta = 0$, c'est évident à partir de la forme canonique.
• Si $\Delta > 0$, il faut développer $a(x - x_1)(x - x_2)$. (A faire en exercice)

III Signe d'un trinôme et inéquations du second degré

III 1 Conjecture graphique

Faire au tableau les trois configurations possibles si $a > 0$ puis si $a < 0$. et conjecturer oralement.

III 2 Énonce du théorème

Théorème

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.
Alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a, sauf entre ses racines lorsqu'elles existent.
En particulier, lorsque $\Delta < 0$, le trinôme est de signe constant (celui de a).

Démonstration :

• Cas où $\Delta < 0$:
A l'aide de la forme canonique, $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
Or Δ est négatif, donc l'expression entre crochets est strictement positive, donc le signe de ax^2+bx+c est celui de a, pour tout réel x.

• Cas où $\Delta = 0$:
Alors $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ et pour tout réel x, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$.
Donc $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.

• Cas où $\Delta > 0$:
A l'aide de la forme canonique, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme.
A l'aide d'un tableau de signe, en supposant que $x_1 < x_2$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

III 3 Inéquations du second degré

Soit a, b et c des réels avec $a \neq 0$.
Une inéquation du second degré à une inconnue x est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :
$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leqslant 0$.
Pour résoudre une telle inéquation, on étudie le signe du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemples :

Résoudre l'inéquation $x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$.
($\Delta = 12 > 0$ et $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ donc les solutions sont les réels de $[2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}]$.

IV Tableau de synthèse du chapitre

Distribuer la feuille polycopié à compléter par les élèves.