

VARIABLE ALÉATOIRE ET LOI BINOMIALE

Première ES - Chapitre 7

TABLE DES MATIÈRES

I	Variable aléatoire et loi de probabilité	2
I 1	Variable aléatoire	2
I 2	Loi de probabilité	2
I 3	Exemple complet	2
I 4	Espérance	3
II	Loi binomiale	3
II 1	Problématique et présentation	3
II 2	Épreuve de Bernoulli	4
II 3	Schéma de Bernoulli	4
II 4	Loi binomiale de paramètres n et p	5
II 5	Espérance et variance de la loi binomiale	5

Dans ce chapitre, n et i désignent des entiers naturels.

I VARIABLE ALÉATOIRE ET LOI DE PROBABILITÉ

I 1 Variable aléatoire

Définition

Lorsqu'à chaque issue d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Remarques :

- Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule : $X, Y, Z, T, G...$
- Lorsque x_1, x_2, \dots, x_n sont les valeurs prises par une variable aléatoire X , on note $X = x_i$ l'événement « X prend la valeur x_i » (avec $1 \leq i \leq n$)

I 2 Loi de probabilité

Définition

Lorsqu'à chaque valeur x_i ($1 \leq i \leq n$) prise par une variable aléatoire X , on associe la probabilité de l'événement $X = x_i$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité de X** .

On représente généralement cette loi à l'aide d'un tableau :

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Remarque importante :

On a alors :

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

I 3 Exemple complet

Énoncé :

On lance un dé cubique, non pipé, dont les faces sont numérotées 1, 1, 1, 2, 3 et 4.

Soit X la variable aléatoire donnant le numéro apparu. Déterminer la loi de probabilité de X .

Correction :

Les valeurs prises par X sont 1, 2, 3 et 4.

Le dé étant non pipé, chaque face a la même probabilité d'être obtenue. 3 faces ayant le chiffre 1, on a donc

$$P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{De même, } P(X = 2) = \frac{1}{6}, P(X = 3) = \frac{1}{6} \text{ et } P(X = 4) = \frac{1}{6}.$$

La loi de probabilité de X est donc :

Valeur x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

I 4 Espérance

Définition

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n , avec $n \in \mathbb{N}$.

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre **réel** noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$$

avec pour tout entier i compris entre 1 et n , $p_i = P(X = x_i)$.

Remarque :

L'espérance mathématique peut être interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.

Remarque importante :

Si X est une variable aléatoire égale à un gain algébrique dans une expérience aléatoire représentant un jeu, alors :

- Si $E(X) > 0$, alors le jeu est dit favorable au joueur (et défavorable à l'organisateur).
- Si $E(X) < 0$, alors le jeu est dit défavorable au joueur (et favorable à l'organisateur).
- Si $E(X) = 0$, alors le jeu est dit équitable.

II LOI BINOMIALE

II 1 Problématique et présentation

On lance vingt fois de suite, dans les mêmes conditions, un dé bien équilibré à 6 faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 20 fois la face 6 sur les 20 lancers ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 fois la face 6 sur les 20 lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois la face 6 sur les 20 lancers ?

Correction :

1. *Faire une idée de l'arbre pondéré complet, bien préciser que toutes les expériences sont identiques et indépendantes (même probabilité).*

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'apparaît la face 6 sur les 20 lancers.

Un seul chemin donne 20 fois la face 6 : celui du haut. Donc $P(X = 20) = \left(\frac{1}{6}\right)^{20}$.

2. Un seul chemin donne 0 fois la face 6 : celui du bas. Donc $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{20}$.

3. On ne peut pas déterminer (pour le moment !) $P(X = 4)$ car il y a un nombre indéterminé de chemins dans l'arbre donnant exactement 4 fois la face 6.

Par exemple : $EEEE\bar{E}\dots\bar{E}$, $EEEE\bar{E}\bar{E}\dots\bar{E}$, $E\bar{E}\dots\bar{E}EEE$ etc

En revanche, on peut déterminer la probabilité de chacun de ces chemins, car ces chemins contiennent autant de branches qui vont vers le haut (4 branches car 4 succès) que de branches qui vont vers le

bas (16 branches car 16 succès) : cette probabilité vaut $\left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{16}$.

Ainsi, $P(X = 4) = (\text{Nombre de chemins qui donnent exactement 4 fois la face 6}) \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{16}$.

Ce nombre de chemins, qui correspond au nombre de **combinaisons** possibles de 4 succès parmi

20 épreuves, est appelé un **coefficient binomial**. Il se détermine (en classe de 1^{ère}!) à l'aide de la calculatrice, sauf quelques cas particuliers. On le note $\binom{20}{4}$.

La calculatrice donne $\binom{20}{4} = 4845$.

$$\text{Ainsi, } P(X = 4) = \binom{20}{4} \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{16} = 4845 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \approx 0,2022.$$

Remarques :

- Dans la pratique, les coefficients binomiaux se déterminent à la calculatrice. Pour les petites valeurs de n , ces nombres peuvent être déterminés directement à partir d'un arbre.

- Dans la pratique (toujours!), il n'est plus nécessaire de réaliser un arbre pour déterminer les différentes probabilités $P(X = k)$ pour k allant de 0 à n . En effet, on peut reproduire la formule obtenue pour $X = 4$ pour toute autre valeur de X comprise entre 0 et 20; déterminer ainsi $P(X = 7)$

$$P(X = 7) = (\text{Nombre de chemins qui donnent exactement 7 fois la face 6}) \times \left(\frac{1}{6}\right)^7 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{13}.$$

$$P(X = 7) = \binom{20}{7} \times \left(\frac{1}{6}\right)^7 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{13} \approx 0,0259.$$

II 2 Épreuve de Bernoulli

Définition

Lorsque, dans une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement S (appelé « succès ») ou à sa non-réalisation \bar{S} (appelé « échec »), on dit que cette expérience est une **épreuve de Bernoulli**.

Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. On dit alors que X suit une **loi de Bernoulli**.

Exemple :

Un jeu de dé est tel que le joueur gagne lorsque le 6 sort et perd dans le cas contraire.

Soit S l'événement « le 6 sort »; alors si le dé n'est pas pipé, $P(S) = \frac{1}{6}$ et $P(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

La variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le 6 sort et la valeur 0 dans les cinq autres cas suit une loi de Bernoulli :

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

II 3 Schéma de Bernoulli

Définition

Lorsque l'on effectue plusieurs épreuves de Bernoulli successives, identiques et indépendantes les unes des autres, on dit qu'il s'agit d'un **schéma de Bernoulli**.

Exemple :

L'expérience consistant à effectuer 20 fois de suite l'épreuve de Bernoulli de l'exemple précédent est un schéma de Bernoulli.

II 4 Loi binomiale de paramètres n et p

Définition

On considère un schéma de Bernoulli constitué par la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Pour chacune d'elles, on note p la probabilité d'obtenir un succès S .

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus parmi les n épreuves. Alors on dit que la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres n et p . On le note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Alors pour tout entier k compris entre 0 et n , on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Démonstration :

L'événement $X = k$ est associé à l'ensemble des chemins dans l'arbre pour lesquels il y a exactement k succès et donc $n - k$ échecs. Chacun de ces chemins a une probabilité égale au produit des probabilités inscrites sur les branches qui constituent ce chemin, c'est-à-dire $p^k (1 - p)^{n-k}$. Or il y a $\binom{n}{k}$ chemins de ce type.

D'où $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Exemple :

Une société spécialisée dans l'audience des médias estime que 19,8% des Français vont regarder le premier match de la France pour l'Euro 2016 de Football. Enzo contacte 20 de ses amis et on estime que le nombre d'amis d'Enzo est assez grand pour assimiler ce tirage à un tirage avec remise de 20 amis. Soit X la variable aléatoire qui donne parmi ces 20 personnes, le nombre de celles qui vont regarder le premier match de l'Euro 2016. (On donnera des valeurs approchées à 10^{-6} près)

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'une personne contactée sur deux va regarder le match.
3. Déterminer la probabilité qu'au moins 2 personnes sur les 20 vont regarder le match.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité qu'entre 5 et 15 personnes vont regarder le match.
5. Écrire un algorithme, en langage naturel, qui renvoie la plus petite valeur de k telle que la probabilité $P(X \geq k)$ soit supérieure à 0,99.

II 5 Espérance et variance de la loi binomiale

Propriété (admise)

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, alors :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$