VARIABLE ALÉATOIRE ET LOI BINOMIALE

Première S - Chapitre 9

Table des matières

I Variable aléatoire et loi de probabilité **2**
- I 1 Variable aléatoire 2
- I 2 Loi de probabilité 2
- I 3 Exemple complet 2

II Espérance, variance et écart-type **3**
- II 1 Espérance 3
  - II 1 a Définition 3
  - II 1 b Linéarité de l'espérance 3
- II 2 Variance et écart-type 4
  - II 2 a Définitions 4
  - II 2 b Deux propriétés de la variance 4

III Schéma de Bernoulli **5**
- III 1 Problématique 5
- III 2 Épreuve de Bernoulli 5
- III 3 Schéma de Bernoulli 6

IV Loi binomiale **6**
- IV 1 Loi binomiale de paramètres n et p 6
- IV 2 Coefficients binomiaux 6
- IV 3 Formule de la loi binomiale 7
- IV 4 Propriétés des coefficients binomiaux 8
- IV 5 Espérance et variance de la loi binomiale 9

Dans ce chapitre, n et i désignent des entiers naturels.

I Variable aléatoire et loi de probabilité

I 1 Variable aléatoire

Définition

Lorsqu'à chaque issue d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Remarques :
- Une variable aléatoire est généralement notée par une lettre majuscule : X, Y, Z, T, G...
- Lorsque x_1, x_2, ..., x_n sont les valeurs prises par une variable aléatoire X, on note $X = x_i$ l'événement « X prend la valeur x_i » (avec $1 \leqslant i \leqslant n$)

I 2 Loi de probabilité

Définition

Lorsqu'à chaque valeur x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité de l'événement $X = x_i$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité de** X.
On représente généralement cette loi à l'aide d'un tableau :

Valeur x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Remarque importante :
On a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

I 3 Exemple complet

Énoncé :
On lance un dé cubique, non pipé, dont les faces sont numérotées 1, 1, 1, 2, 3 et 4.
Soit X la variable aléatoire donnant le numéro apparu. Déterminer la loi de probabilité de X.

Correction :
Les valeurs prises par X sont 1, 2, 3 et 4.
Le dé étant non pipé, chaque face a la même probabilité d'être obtenue. 3 faces ayant le chiffre 1, on a donc $P(X = 1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
De même, $P(X = 2) = \frac{1}{6}$, $P(X = 3) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 4) = \frac{1}{6}$.
La loi de probabilité de X est donc :

Valeur x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

II Espérance, variance et écart-type

Dans toute cette partie, on appelle X une variable aléatoire qui prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n.

II 1 Espérance

II 1 a Définition

Définition

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre **réel** noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Remarque :
L'espérance mathématique peut être interprétée comme une valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.

Exercice :
Faire l'exercice 42 page 306 du livre (permet d'introduire la remarque suivante).

Remarque importante :
Si X est une variable aléatoire égale à un gain algébrique dans une expérience aléatoire représentant un jeu, alors :
- Si $E(X) > 0$, alors le jeu est dit favorable au joueur (et défavorable à l'organisateur).
- Si $E(X) < 0$, alors le jeu est dit défavorable au joueur (et favorable à l'organisateur).
- Si $E(X) = 0$, alors le jeu est dit équitable.

II 1 b Linéarité de l'espérance

Propriété

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Démonstration :

Si X prend les valeurs x_1, x_2, ..., x_n, alors $aX+b$ prend les valeurs ax_1+b, ax_2+b, ..., ax_n+b et on a :

$\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n$, $X = x_i \Leftrightarrow aX + b = ax_i + b$ d'où $P(aX + b = ax_i + b) = P(X = x_i)$.

Ainsi, en posant $p_i = P(X = x_i)$, on a :

$$E(aX+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)P(aX+b = ax_i+b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i = \sum_{i=1}^{n} ax_ip_i + \sum_{i=1}^{n} bp_i = a\sum_{i=1}^{n} p_ix_i + b\sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Or $\sum_{i=1}^{n} p_ix_i = E(X)$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Donc $E(aX + b) = aE(X) + b$.

II 2 Variance et écart-type

II 2 a Définitions

Définition

La variance de la loi de probabilité de X est le nombre réel positif noté $V(X)$ défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$

Définition

L'écart-type de la loi de probabilité de X est le nombre réel positif noté $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

II 2 b Deux propriétés de la variance

Propriété 1 : Formule de König-Huyghens - admise

Soit X une variable aléatoire. Alors :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Propriété 2

Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire. Alors :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Démonstration :

$$V(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i (ax_i + b - E(aX+b))^2$$
$$V(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i (ax_i + b - (aE(X)+b))^2$$
$$V(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i (ax_i - aE(X))^2$$
$$V(aX+b) = \sum_{i=1}^{n} p_i a^2 (x_i - E(X))^2$$
$$V(aX+b) = a^2 \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$$
$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

III Schéma de Bernoulli

III 1 Problématique

On lance vingt fois de suite, dans les mêmes conditions, un dé bien équilibré à 6 faces.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 20 fois la face 6 sur les 20 lancers ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 0 fois la face 6 sur les 20 lancers ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois la face 6 sur les 20 lancers ?

Correction :

1. *Faire une idée de l'arbre pondéré complet, bien préciser que toutes les expériences sont identiques et indépendantes (même probabilité).*
   Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois qu'apparait la face 6 sur les 20 lancers.
   Un seul chemin donne 20 fois la face 6 : celui du haut. Donc $P(X=20) = \left(\frac{1}{6}\right)^{20}$.
2. Un seul chemin donne 0 fois la face 6 : celui du bas. Donc $P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{20}$.
3. On ne peut pas déterminer (pour le moment !) $P(X=4)$ car il y a un nombre indéterminé de chemins dans l'arbre donnant exactement 4 fois la face 6.
   Par exemple : $EEEE\overline{E}...\overline{E}$, $EEE\overline{E}E\overline{E}...\overline{E}$, $E\overline{E}...\overline{E}EEE$ etc
   En revanche, on peut déterminer la probabilité de chacun de ces chemins, car ces chemins contiennent autant de branches qui vont vers le haut (4 branches car 4 succès) que de branches qui vont vers le bas (16 branches car 16 succès) : cette probabilité vaut $\left(\frac{1}{6}\right)^{4} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{16}$.
   Ainsi, $P(X=4) =$ (Nombre de chemins qui donnent exactement 4 fois la face 6) $\times \left(\frac{1}{6}\right)^{4} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{16}$.
   Reste à trouver le nombre de ces chemins...

   Question subsidiaire : $P(X=7) = ?$
   $P(X=7) =$ (Nombre de chemins qui donnent exactement 7 fois la face 6) $\times \left(\frac{1}{6}\right)^{7} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{13}$.

III 2 Épreuve de Bernoulli

Définition

Lorsque, dans une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement S (appelé « succès ») ou à sa non-réalisation $\overline{S}$ (appelé « échec »), on dit que cette expérience est une **épreuve de Bernoulli**.
Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec. On dit alors que X suit une **loi de Bernoulli**.

Exemple :

Un jeu de dé est tel que le joueur gagne lorsque le 6 sort et perd dans le cas contraire.
Soit S l'événement « le 6 sort » ; alors si le dé n'est pas pipé, $P(S) = \dfrac{1}{6}$ et $P(\overline{S}) = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.
La variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le 6 sort et la valeur 0 dans les cinq autres cas suit une loi de Bernoulli :

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

III 3 Schéma de Bernoulli

Définition

Lorsque l'on effectue plusieurs épreuves de Bernoulli successives, identiques et indépendantes les unes des autres, on dit qu'il s'agit d'un **schéma de Bernoulli**.

Exemple :
L'expérience consistant à effectuer 20 fois de suite l'épreuve de Bernoulli de l'exemple précédent est un schéma de Bernoulli.

IV Loi binomiale

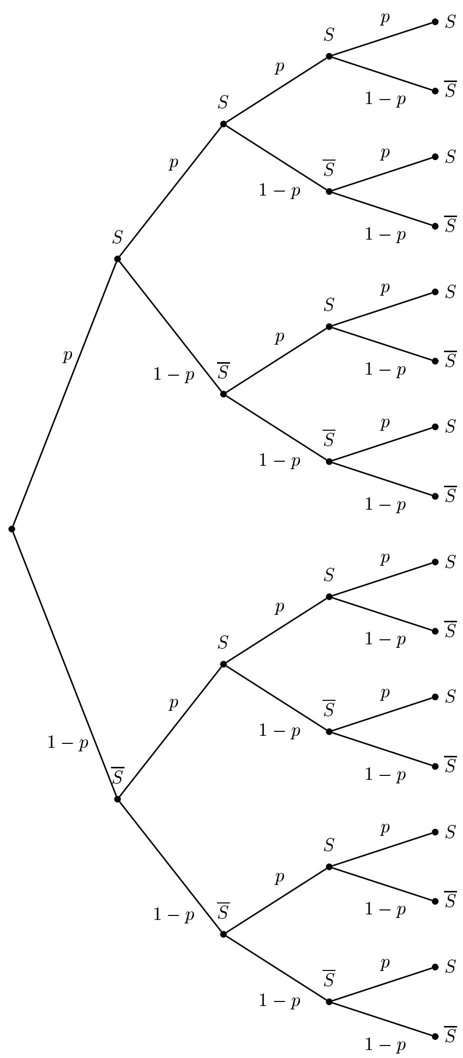
IV 1 Loi binomiale de paramètres n et p

Définition

On considère un schéma de Bernoulli constitué par la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Pour chacune d'elles, on note p la probabilité d'obtenir un succès S.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus parmi les n épreuves. Alors on dit que la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres n et p. On le note : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n\,;p)$.

IV 2 Coefficients binomiaux

Considérons un schéma de Bernoulli constitué de la répétition de 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. On pose $p = P(S)$ où S est le succès de l'épreuve de Bernoulli.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus parmi les 4 épreuves.
Cette situation peut être représenté par l'arbre ci-après :



- $P(X = 4) = p^4$

- $P(X = 0) = (1 - p)^4$

- $P(X = 1)$:
L'événement $X = 1$ est réalisé par **quatre** chemins différents de l'arbre.
Chaque chemin comporte 1 succès parmi 4 épreuves.
Ce nombre de chemins se note $\binom{4}{1}$ et est appelé un **coefficient binomial**. On a donc $\binom{4}{1} = 4$.
On remarque que chacun de ces chemins a la même probabilité : $p(1 - p)^3$.
Ainsi : $P(X = 2) = \binom{4}{1} \times p \times (1 - p)^3 = 4p(1 - p)^3$.

- $P(X = 2) = \binom{4}{2} \times p^2 \times (1 - p)^2 = 6p^2(1 - p)^2$.

- $P(X = 3) = \binom{4}{3} \times p^3 \times (1 - p) = 4p^3(1 - p)$.

On a ainsi déterminer la loi de probabilité de X. On peut vérifier à la calculatrice que $\sum_{k=0}^{4} P(X = k) = 1$.

Remarques :
- Dans la pratique, les coefficients binomiaux se déterminent à la calculatrice. Pour les petites valeurs de n, ces nombres peuvent être déterminés directement à partir d'un arbre.
- Dans la pratique (toujours !), il n'est plus nécessaire de réaliser un arbre pour déterminer les différentes probabilités $P(X = k)$ pour k allant de 0 à n. En effet, l'exemple précédent nous a montré qu'il était possible de déterminer une formule générale de la loi binomiale :

IV 3 Formule de la loi binomiale

Théorème

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.
Alors pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Démonstration :

L'événement $X = k$ est associé à l'ensemble des chemins dans l'arbre pour lesquels il y a exactement k succès et donc $n-k$ échecs. Chacun de ces chemins a une probabilité égale au produit des probabilités inscrites sur les branches qui constituent ce chemin, c'est-à-dire $p^k(1 - p)^{n-k}$. Or il y a $\binom{n}{k}$ chemins de ce type.
D'où $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

IV 4 Propriétés des coefficients binomiaux

Propriété 1

Soient n un entier naturel et k un entier naturel compris entre 0 et k. Alors :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration :

$\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant 0 succès : celui ne comportant que des échecs.
$\binom{n}{n} = 1$ car il n'y a qu'un seul chemin réalisant n succès : celui ne comportant que des succès.
$\binom{n}{1} = n$ car il y a n chemins réalisant 1 succès. En effet, les n-uplets réalisant un seul succès ne diffèrent que par la place qu'occupe l'unique succès dans la liste des issues. Il y a n choix possibles pour placer le succès parmi les n épreuves.
$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ car lorsqu'il y a $n-k$ succès, il y a k échecs. Compter le nombre de chemins menant à $n-k$ succès revient donc à compter le nombre de chemins menant à k échecs. Dénombrer les façons de placer k échecs parmi n épreuves revient alors à calculer $\binom{n}{k}$.

Propriété 2 : Formule de Pascal

Soient n un entier naturel et k un entier naturel compris entre 0 et n. Alors :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration :

Les chemins comportant $k+1$ succès parmi $n+1$ épreuves de Bernoulli sont de deux types :
- ceux pour lesquels la dernière épreuve (la $(n+1)$ième) donne un succès.
- ceux pour lesquels la dernière épreuve donne un échec.
- Si la $(n+1)$ième épreuve donne un succès, alors pour avoir un total de $k+1$ succès, il faut que les n épreuves précédentes aient donné k succès. Il y a donc $\binom{n}{k}$ combinaisons possibles.
- Si la $(n+1)$ième épreuve donne un échec, alors pour avoir un total de $k+1$ succès, il faut que les n épreuves précédentes aient donné $k+1$ succès. Il y a donc $\binom{n}{k+1}$ combinaisons possibles.
Les ensembles de ces deux types de chemins étant disjoints, on en déduit donc que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Faire un schéma des deux cas de figure, avec des cases, et la dernière case qui est S ou $\overline{S}$.

Remarque :
On retrouve les coefficients binomiaux et la formule de Pascal dans un tableau dit « triangle de Pascal » :

n / k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

On retrouve aussi les coefficients binomiaux dans le développement de $(a+b)^n$:
$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = a+b$
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

On peut alors conjecturer le développement de $(a+b)^n$ pour tout entier naturel n :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + ... + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

qui peut s'écrire aussi :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k}$$

IV 5 Espérance et variance de la loi binomiale

Propriété (admise)

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$, alors :

$$E(X) = np \qquad \text{et} \qquad Var(X) = np(1-p)$$